

OSCILLATIONS LIBRES D'UN PENDULE PESANT (2h)

En tenant compte du fait qu'il n'existe qu'un exemplaire de chaque pendule, mais que les différentes parties sont indépendantes les unes des autres (II, III et IV), les différents groupes intervenant simultanément sur ce TP organiseront au départ une permutation judicieuse sur les différents postes.

I Etude théorique

Le système étudié est un pendule pesant régi en l'absence de frottements par l'équation différentielle suivante obtenue à partir du théorème du moment cinétique (égalité entre la dérivée par rapport au temps du moment cinétique et le moment du poids) :

$$J \ddot{\theta} = -M g a \sin \theta$$

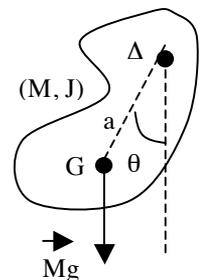
où θ est l'angle fait par le pendule avec la verticale, J son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ de rotation (en kg.m^2), M sa masse, g l'accélération de la pesanteur et a la distance séparant son centre d'inertie de l'axe de rotation.

Dans le cas de petites oscillations ($\sin \theta \approx \theta$), l'équation du mouvement s'écrit sous la forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_o^2 = \frac{Mga}{J}.$$

Le mouvement est alors harmonique de période $T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mga}}$: $\theta = \theta_o \cos(\omega_o t + \varphi)$.

Cette période T_o est indépendante de l'amplitude θ_o des oscillations ; on dit qu'il y a **isochronisme** des petites oscillations. Pour des oscillations de grande amplitude, la période dépend de cette amplitude, et augmente avec elle.



II Oscillations non amorties

On utilise dans un premier temps le système constitué par une masse accrochée à l'extrémité d'un fil, ce dernier étant fixé sur une potence munie d'un rapporteur.

A l'aide d'un chronomètre, déterminer la période T des oscillations pour une amplitude initiale θ_o allant de 5° à 20° par pas de 5° , puis ensuite de 30° à 70° par pas de 10° . Pour une bonne précision, on mesurera en fait 5 ou 10 périodes.

Tracer la courbe $T(\theta_o)$. Vérifier l'isochronisme des petites oscillations et qu'ensuite la période augmente avec l'amplitude.

III Simulations

Elles seront conduites avec le logiciel Spyder utilisant le langage Python.

1) Evolution de l'élongation en fonction du temps

Il s'agit ici de résoudre une équation différentielle d'ordre 2 non linéaire du type : $\ddot{x} = -\sin x$.

Python ne permettant d'intégrer numériquement que des équations différentielles du premier ordre, on remplace l'équation différentielle du second ordre par un système de deux équations différentielles d'ordre 1. En introduisant la vitesse v , on obtient le système : $v = \dot{x}$ et $\dot{v} = -\sin x$.

```
from scipy import * (chargement du module à usage scientifique)
from pylab import * (chargement du module de calcul numérique)
from scipy.integrate import odeint (chargement de la fonction permettant la résolution des équations différentielles ordinaires)
```

du premier ordre)

def deriv(syst,t) : (création de la fonction « deriv »)

x=syst[0] (les valeurs de x sont rangées dans la colonne « zéro » d'un tableau 2D « syst »)

v=syst[1] (et les valeurs de v dans la colonne « un »)

dxdt=v (définition de la vitesse)

dvdt=-sin(x) (valeur de l'accélération)

return[dxdt,dvdt] (récupération des résultats)

t=linspace(t_{min},t_{max},nbpt) (création de la liste des temps successifs, instant de départ t_{min}, instant d'arrivée t_{max}, et nombre de points nbpt, valeurs à choisir)

liste=[A₁,A₂,A₃,...] (création de la liste des amplitudes angulaires en radian, valeurs à choisir)

for i in liste : (démarrage de la boucle permettant de faire varier les conditions initiales)

CI=array([i,0]) (création du tableau 2D des conditions initiales)

sols=odeint(deriv,CI,t) (résolution du système d'équations différentielles)

x=sols[:,0] (récupération des valeurs de x dans la colonne « zéro » du tableau 2D « sols »)

v=sols[:,1] (et des valeurs de v dans la colonne « un »)

plot(t,x) (tracé des courbes)

title('x(t)') (affichage du titre)

show() (affichage du graphe)

Commenter l'évolution de la période avec l'amplitude.

2) Portrait de phase

En vous inspirant du programme précédent, tracer le portrait de phase du pendule.

On prendra un jeu de conditions initiales suffisamment varié en positions et en vitesses pour le graphe soit complet avec les trois types de régime possibles.

Commenter rapidement ces derniers en insistant sur leurs différences.

3) Evolution de la période en fonction de l'amplitude

On part de la conservation de l'énergie mécanique pour le pendule lâché avec l'amplitude θ_0 sans vitesse initiale :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mga \cos \theta = -mga \cos \theta_0.$$

On en déduit $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2mga}{J}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}.$

On intègre ensuite sur un quart de période après avoir séparé les variables : $\int_0^{T/4} dt = -\sqrt{\frac{J}{2mga}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$

Ce qui donne finalement $T = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{J}{mga}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$

```
from scipy import *
```

```
from pylab import *
```

```
from scipy.integrate import quad (chargement de la fonction permettant le calcul numérique d'intégrales)
```

```
abscisse=range(1,21,1) (création de la liste des abscisses des points du graphe)
```

```
ordonnee=[] (création de la liste des ordonnées des points du graphe, vide au départ)
```

```
for i in abscisse : (démarrage de la boucle permettant de passer d'un point au suivant en changeant l'amplitude)
```

```
def f(x) : (création de la fonction « f(x) »)
```

```
    return (cos(x)-cos(i/10))**(-1/2) (calcul de l'argument de l'intégrale en prenant pour simplifier  $2\sqrt{2} \sqrt{\frac{J}{mga}} = 1$ )
```

```
    J=quad(f,0,i/10.0) (calcul de l'intégrale donnant la période)
```

```
    ordonnee.append(J) (ajout du calcul précédent à la liste des ordonnées)
```

```
xlabel('Amplitude') (étiquette de l'axe des abscisses)
```

```
ylabel('Periode') (étiquette de l'axe des ordonnées)
```

```
ylim(2,3) (échelle des ordonnées)
```

```
plot(abscisse,ordonnee) (tracé de la courbe)
```

```
show() (affichage du graphe)
```

Commenter.

IV Oscillations avec amortissement fluide

On utilise maintenant le pendule constitué par une tige métallique munie d'une surcharge, d'une ailette et d'un capteur.

L'interfaçage au niveau de l'oscillateur est réalisé par un dispositif à effet Hall : des aimants permanents solidaires du pendule se déplacent par rapport par rapport à l'élément détecteur semi-conducteur situé à l'intérieur de la tige horizontale faisant office d'axe de rotation pour le pendule. On recueille alors une tension de Hall, fonction de l'angle θ que fait le pendule avec la verticale. Ce dispositif est alimenté par un générateur délivrant une tension continue égale à 12 V.

L'enregistrement des oscillations est effectué par le logiciel SYNCHRONIE par l'intermédiaire de la carte d'acquisition (entrée EA0).

On travaillera avec une surcharge d'environ 1 kg placée à une distance de l'extrémité inférieure de la tige égale à un quart de sa longueur totale. L'amortissement fluide est produit par une ailette placée sous la surcharge en bas de la tige et orientée perpendiculairement au déplacement de cette dernière.

L'équation différentielle devient alors : $J \ddot{\theta} = -M g a \sin\theta - k \dot{\theta}$, ce qui donne encore sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_o}{Q} \dot{\theta} + \omega_o^2 \theta = 0.$$

Sa solution est de la forme : $\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$ en posant $2\lambda = \frac{\omega_o}{Q}$.

S'assurer que la tension recueillie est nulle lorsque le pendule est à l'équilibre. Dans le cas contraire, on peut faire pivoter légèrement la tige horizontale faisant office d'axe de rotation du pendule jusqu'à l'obtention d'une tension quasiment nulle à l'équilibre. On préférera cependant, surtout si la tension résiduelle à l'équilibre est importante, effectuer une compensation logicielle en introduisant sur la voie utilisée un décalage opposé à cette dernière lors de l'acquisition.

Enregistrer les oscillations amorties pendant 120 s. Observer le caractère non rectiligne de la décroissance de l'enveloppe des oscillations.

Enregistrer les oscillations amorties pendant 30 s. Le capteur à effet Hall ne donnant une réponse linéaire que pour des angles pas trop grands, on veillera à ce que l'amplitude initiale des oscillations ne dépasse pas une vingtaine de degrés.

Remplir un tableau concernant les maxima de la courbe sur une dizaine de périodes : temps t_n auquel ils ont été obtenus, valeur de la tension U_n et enfin $\ln U_n$.

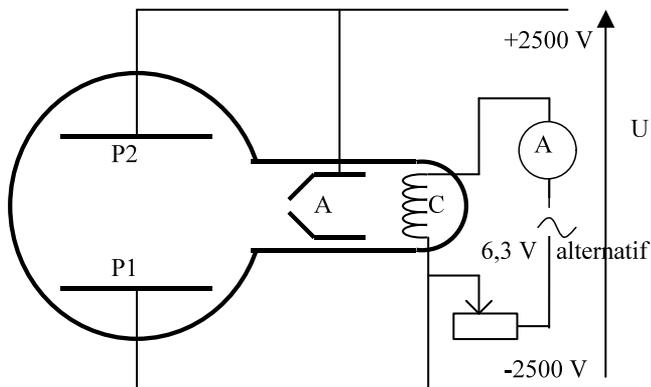
Tracer la courbe $\ln U_n = f(t_n)$ et effectuer une régression linéaire afin d'obtenir le coefficient directeur de cette droite. En déduire la valeur du coefficient d'amortissement λ .

En utilisant la fonction "modélisation" du menu "Traitements" du logiciel, montrer la validité de l'équation donnée ci-dessus pour $\theta(t)$ en comparant la courbe expérimentale et la modélisation. On indiquera alors les valeurs numériques adéquates de U_0 (tension correspondant à θ_0), λ , ω_0 et φ . Comparer la valeur de λ avec celle précédemment obtenue.

MESURE DE LA CHARGE MASSIQUE DE L'ÉLECTRON (2h)

Le but de ce TP est la mesure du rapport de la charge e de l'électron à sa masse m à partir de l'examen des caractéristiques géométriques d'un faisceau d'électrons déviés dans un champ magnétique.

I Caractéristiques du tube utilisé (Sieber Scientific) :



Le tube est une ampoule de verre dans laquelle on a fait un vide poussé (10^{-7} mmHg $\approx 10^{-5}$ Pa).

A l'intérieur du tube sont disposés :

- * Un canon à électrons. La différence de potentiel entre anode et cathode est notée U .
- * Une paire de plaques horizontales P_1 et P_2 . Une différence de potentiel U identique, appliquée entre ces plaques, crée un champ électrostatique sensiblement uniforme dans la région centrale du tube.
- * Une plaque fluorescente permettant de mettre en évidence le faisceau électronique.

A l'extérieur du tube sont disposées deux bobines de Helmholtz. Parcourues par un courant d'intensité I , elles créent dans la région centrale du tube un champ magnétique \vec{B} sensiblement uniforme dont le module est donné par l'expression :

$$B = \frac{32 \pi \sqrt{5}}{25} 10^{-7} \frac{NI}{R} \quad (N = 320 \text{ spires ; } R = 68,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \text{ soit } B = 4,23 \cdot 10^{-3} \cdot I \quad (\text{pour } I \text{ en A})$$

II Montages

DANGER : dans tous les montages, opérer avec beaucoup de précautions. Ne jamais effectuer ou modifier les branchements sans supprimer au préalable la THT (Très Haute Tension) !

On prendra soin de toujours modifier graduellement la valeur de la THT, et de ne pas actionner l'interrupteur correspondant sans avoir préalablement réglé la THT sur son niveau minimal.

Ne pas laisser le générateur allumé trop longtemps, au risque d'un échauffement de l'appareil qui amènerait une mauvaise qualité des mesures. **IL FAUT DONC L'ETEINDRE ENTRE DEUX MESURES.**

Remarque :

Deux types de fils sont mis à votre disposition : les fils classiques seront employés pour le circuit de chauffage et l'alimentation des bobines de Helmholtz, les fils à haute isolation seront utilisés pour les THT.

Câbler le montage, puis le faire vérifier par le professeur avant d'actionner l'alimentation.

Le montage comporte trois circuits indépendants :

- le circuit permettant le chauffage du filament, constitué d'une association série du filament, d'un générateur de tension alternative 6,3 V, d'un ampèremètre et d'un rhéostat ;
- le circuit à haute tension branché entre anode et cathode du canon à électrons ; on branchera éventuellement en dérivation les plaques de déviation ;
- le circuit d'alimentation des bobines de Helmholtz, constitué d'une association série d'une alimentation stabilisée utilisée en générateur de courant, d'un ampèremètre. L'inversion du sens de branchement des bobines permettra d'inverser très simplement le sens du courant dans celle-ci, et d'obtenir ainsi un jeu de mesures compensant l'éventuelle asymétrie du montage.

1) Observation du faisceau électronique

Alimenter le filament du tube (chauffage de la cathode C) à partir de la tension alternative 6,3 V. Placer un rhéostat en résistance variable dans le circuit de chauffage et régler l'intensité i à 1,3 A. Appliquer entre A et C une haute tension (HT) fournie par le bloc d'alimentation. Utiliser les bornes - 2500 V et + 2500 V.

La mesure de cette haute tension se fait à l'aide d'un voltmètre muni d'une sonde réductrice 5000V /50V : un montage diviseur de tension divise par 100 la tension enregistrée. Attention à configurer correctement le multimètre MX 579 utilisé (position voltmètre, mesure d'une tension continue, calibre adapté).

2) Déviations électrostatique



a) Etude théorique

Les électrons sont accélérés par la tension U , acquérant une vitesse v_0 en sortie du canon à électrons. Ils entrent alors dans l'espace situés entre les plaques de déviation, et sont alors soumis à un champ électrique uniforme d'intensité $E = U/d$, U étant la tension imposée aux plaques et d la distance qui les sépare.

- En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, relier la vitesse v_0 acquise par les électrons à la différence de potentiel U à laquelle ils sont soumis en traversant l'espace entre les électrodes accélératrices du canon à électrons.
- Ecrire la relation fondamentale de la dynamique, qui conduit par intégration à l'équation horaire du mouvement, puis en déduire l'équation cartésienne de la trajectoire des électrons entre les plaques de déviation.

b) Etude expérimentale

Relier les plaques P_1 et P_2 aux bornes -2500 V et +2500 V du bloc d'alimentation. Observer que la trajectoire des électrons est une parabole. Justifier à partir de l'étude théorique précédente que cette courbe reste invariable quand la tension U varie.

3) Déviations magnétique



a) Etude théorique

On envisage le cas d'électrons entrant dans un champ magnétique \vec{B} supposé uniforme avec une vitesse \vec{v} de module v_0 de direction orthogonale à \vec{B} .

Les électrons, de charge $-e$, sont soumis alors à une force magnétique d'expression : $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Justifier que le mouvement des électrons est plan à partir de l'expression de la force magnétique.

Montrer à partir du théorème de l'énergie cinétique que le module v_0 de la vitesse des électrons reste invariant.

Ecrire la relation fondamentale de la dynamique en explicitant l'accélération $\vec{\gamma}$ sur la base de Frénet et en déduire que les électrons évoluent sur une trajectoire circulaire de rayon $r = \frac{mv_0}{eB}$.

b) Etude expérimentale

Supprimer la THT entre P_1 et P_2 . Pour s'assurer que le condensateur formé par P_1 et P_2 est et reste déchargé, court-circuiter P_1 et P_2 avec un fil **tenu par l'isolant !** (ce fil est laissé en place pour les mesures qui suivent).

Alimenter les bobines avec un courant de 0,1 à 1 A ; **attention à ne pas dépasser 2 A.**

Observer et justifier à partir de l'étude théorique précédente que, pour U donné, le rayon r de la trajectoire circulaire des électrons diminue quand I augmente, et que, pour I donné, r croît avec la tension accélératrice U .

III Mesure de la charge massique de l'électron

1) Principe de la mesure

Les électrons étant introduits ici avec une vitesse initiale orthogonale au champ magnétique produit par les bobines, leur trajectoire sera circulaire. La force magnétique : $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ a ici pour module $F = e.v.B$.

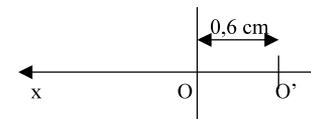
Par application du théorème de l'énergie cinétique, on a obtenu une relation entre la vitesse des électrons à la sortie du canon et la tension accélératrice U . Par ailleurs, la relation fondamentale de la dynamique a permis d'établir une relation entre cette vitesse, le rayon r de la trajectoire circulaire et le module du champ magnétique B en écrivant.

En éliminant la vitesse entre les deux relations précédentes, obtenir une relation entre le rapport e/m , U , r et B .

 Evaluation de r : le point de sortie du canon est voisin de l'origine O du quadrillage tracé sur la plaque fluorescente. La trajectoire circulaire est donc tangente à Ox au voisinage du point O , et elle passe par un point M de coordonnées x, y mesurées sur le quadrillage. En déduire que son rayon est donné par : $r = \frac{x+y}{2}$.

(Cette relation se déduit aisément, pourvu que l'on fasse un schéma !)

 Correction : le point de sortie du canon n'est pas exactement en O mais en O' d'abscisse $x_{O'} = -0,6$ cm. Corriger en conséquence les valeurs de x .



2) Mesures

Donner à I une valeur de $0,2$ A ; calculer le champ produit par les bobines.

Donner à U une valeur de 2000 V. Noter l'abscisse x du point de l'arc de cercle dont l'ordonnée est $y = 2$ cm (on fera sur x la correction signalée plus haut).

Inverser ensuite le sens du courant de $0,2$ A dans les bobines, ce qui revient à inverser le sens de l'axe Oy , et noter l'abscisse x du point de l'arc de cercle dont l'ordonnée est $y = -2$ cm (on fera sur x la correction signalée plus haut).

Prendre la moyenne des deux valeurs trouvées pour x ; en déduire r .

Reprendre les mêmes mesures pour différentes valeurs de U .

3) Tableau de résultats

U	x (1 ^{ère} valeur)	x (2 ^{ème} valeur)	x moyen	r	e/m (avec encadrement)
2000 V					
3000 V					
4000 V					
5000 V					

Préciser les unités.

Résolution d'une indication numérique :

Si la résolution d'un instrument à affichage numérique est $2a$, la valeur X du signal mesuré peut se situer avec une égale probabilité à n'importe quel endroit de l'intervalle $[X - a ; X + a]$. Le signal suit donc une loi de probabilité uniforme de largeur

a . On montre que dans ce cas : $u(X) = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

La mesure des valeurs x et y répond à une loi normale, dont les incertitudes - types peuvent être estimées respectivement à $2,5$ mm ($1/4$ cm) et $1,0$ mm.

Déterminer l'incertitude sur la charge massique e/m au moyen du logiciel GUM_MC, pour un intervalle de confiance à 95% . L'incertitude sur le coefficient constant $4,23 \cdot 10^{-3}$ reliant la norme du champ B à l'intensité I mesurée est négligeable ; de même sur le coefficient de conversion de tension par la sonde de mesure ($1V$ pour $100V$).

En déduire un encadrement de la valeur de e/m obtenue expérimentalement pour chaque ligne du tableau.

Confronter ces résultats à la valeur de e/m calculée à partir des valeurs tabulées de e et m : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.
Conclusion ?