Effet Doppler – étude théorique.

On considère le cas d'un émetteur fixe, produisant un signal de fréquence f_e, de période $T_e = 1/f_e$, se propageant avec la célérité c dans le référentiel d'étude. Le récepteur se déplace en s'éloignant de l'émetteur avec une vitesse v.

La vitesse de propagation (ou célérité c) est très supérieure à la vitesse de déplacement du récepteur v.

On considère deux instants successifs t_1 et t_2 séparés d'une période T_e, l'émetteur émet deux signaux à ces instants respectifs. L est la distance séparant l'émetteur du récepteur à l'instant de la première réception t_{r1}.

L'instant t_{r1} pour lequel le récepteur reçoit le premier signal est égal à $t_1 + \Delta t_1$ où Δt_1 est la durée de propagation nécessaire pour couvrir la distance L séparant l'émetteur du récepteur à t_{r1}.

Le calcul doit être conduit en tenant compte du supplément de durée de propagation dû au déplacement du récepteur entre les deux instants d'émission t_1 et t_2.

La durée de propagation pour que le premier signal atteigne le récepteur est alors : $\Delta t_1 = L/c$.

La durée de propagation pour que le second signal atteigne le récepteur est plus importante, du fait de l'augmentation de la distance émetteur-récepteur :

$$\Delta t_2 = L/c + v.T_e/c$$

Puisque qu'entre les instants t_1 et t_2, séparés par la période de l'émetteur le récepteur s'est déplacé d'une distance : $v.T_e$.

La période des signaux reçus par le récepteur est $T_r = t_{r2} - t_{r1}$ où $t_{r1} = t_1 + \Delta t_1$ et $t_{r2} = t_2 + \Delta t_2$

Soit : $T_r = t_2 + (L + v.T_e)/c - t_1 - L/c$

Qui amène : $T_r = t_2 - t_1 + v.T_e/c = T_e + v.T_e/c$ d'où finalement : $T_r = T_e.(1 + v/c)$.

La relation en fréquences s'écrit :

$$\mathrm{f}_r = \frac{\mathrm{f}_e}{1 + \mathrm{v/c}}$$

Comme v << c on peut prendre pour approximation au premier ordre, en appliquant le développement limité au premier ordre $(1 + \varepsilon)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon$:

$$\frac{1}{1 + \mathrm{v/c}} = (1 + \mathrm{v/c})^{-1} = 1 - \mathrm{v/c}$$

D'où finalement :

$$\mathrm{f}_r = \mathrm{f}_e.(1 - \mathrm{v/c})$$

Pour une source s'éloignant du récepteur, la fréquence reçue par le récepteur apparaît plus faible que celle de l'onde émise par la source.

Dans le cas inverse, pour lequel la source émettrice est en train de se rapprocher du récepteur, on peut reprendre un raisonnement analogue, la distance entre émetteur et récepteur diminuant cette fois avec le temps :

La durée de propagation pour que le premier signal atteigne le récepteur est alors : $\Delta t_1 = L/c$.

La durée de propagation pour que le second signal atteigne le récepteur est alors plus faible, du fit du rapprochement de la source vis-à-vis de l'émetteur :

$$\Delta t_2 = L/c - v.T_e/c$$

Puisque qu'entre les instants t_1 et t_2, séparés par la période de l'émetteur le récepteur s'est déplacé d'une distance : $v.T_e$, diminuant ainsi d'autant la distance séparant émetteur et récepteur.

Le reste du raisonnement est identique à celui exposé précédemment : La période des signaux reçus par le récepteur est $T_r = t_{r2} - t_{r1}$ où $t_{r1} = t_1 + \Delta t_1$ et $t_{r2} = t_2 + \Delta t_2$

Soit : $T_r = t_2 + (L - v.T_e)/c - t_1 - L/c$

Qui amène : $T_r = t_2 - t_1 - v.T_e/c = T_e - v.T_e/c$ d'où finalement : $T_r = T_e.(1 - v/c)$.

La relation en fréquences s'écrit :

$$f_r = \frac{f_e}{1 - v/c}$$

Comme v << c on peut prendre pour approximation au premier ordre, en appliquant le développement limité au premier ordre $(1 + \varepsilon)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon$:

$$\frac{1}{1 - v/c} = (1 - v/c)^{-1} = 1 + v/c$$

D'où finalement :

$$f_r = f_e.(1 + v/c)$$

Pour une source se rapprochant du récepteur, la fréquence reçue par le récepteur apparaît plus grande que celle de l'onde émise par la source.

Remarques :

1. Les conclusions obtenues sont commandées par le mouvement relatif de la source et de l'émetteur. On aura par exemple un résultat identique dans le cas où une source mobile se rapproche d'un récepteur fixe ou si au contrait la source est fixe et l'émetteur est en mouvement, se rapprochant de la source.
2. Une étude plus générale peut être conduite en introduisant le vecteur vitesse $\vec{v}$ traduisant le mouvement du récepteur et l'unitaire $\vec{u}$ représentant la direction et le sens de propagation de l'onde.
   La relation donnant la fréquence reçue est alors :

$$f_r = f_e.(1 - (\vec{v} \bullet \vec{u})/c) = f_r = f_e.(1 - v.\cos\theta/c)$$

Où θ est l'angle entre la vitesse $\vec{v}$ traduisant le mouvement du récepteur par rapport à la source et l'unitaire $\vec{u}$ donnant la direction et le sens de propagation de l'onde.