OSCILLATIONS LIBRES

Le système étudié est un pendule simple, placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme, constitué d'une part d'une tige métallique rigide de masse négligeable, et d'autre part de l'accéléromètre assimilé à un point matériel dont le centre de gravité est situé à la distance L = 50 cm de l'axe de rotation. On note θ(t) l'angle que fait le pendule avec la verticale.
Une ailette peut être fixée sur la tige afin d'introduire un frottement fluide. Un dispositif de serrage du sommet de la tige entre deux disques en plastique permet d'introduire un frottement solide. En l'absence de l'utilisation de ces dispositifs, on peut alors considérer la liaison pivot comme étant quasiment idéale le temps de l'expérience, c'est-à-dire sans frottement.
L'accéléromètre est utilisé pour mesurer la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ du pendule. On pourra travailler directement sur cette dernière qui a la même forme que θ(t), avec en particulier la même période.

Le pendule sera toujours lâché avec les mêmes conditions initiales : $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$ (pas de vitesse initiale).

***Capteur DynNova* : on rappelle la nécessité de quitter le logiciel d'acquisition dès cette dernière effectuée, et d'éteindre le capteur lors des périodes d'inutilisation.**

I Oscillations non amorties

1) Étude théorique (lecture)

En l'absence de frottements, le pendule est régi par l'équation différentielle suivante : $\ddot{\theta} + \omega_0^2 sin\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.
Dans le cas de petites oscillations (pour $sin\theta \approx \theta$), l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, et de solution $\theta(t) = \theta_0 cos(\omega_0 t)$ avec les conditions initiales choisies.

Cette période T_0 est indépendante de l'amplitude θ_0 des oscillations ; on dit qu'il y a isochronisme des petites oscillations.
Pour des oscillations de grande amplitude, la période dépend de cette amplitude, et augmente avec elle.

2) Simulations

Elles seront conduites avec le logiciel Spyder utilisant le langage Python.

a) Évolution de l'élongation en fonction du temps

Il s'agit ici de résoudre une équation différentielle d'ordre 2, non linéaire, du type : $\ddot{x} = -sinx$.

Python ne permettant d'intégrer numériquement que des équations différentielles du premier ordre, on remplace l'équation différentielle du second ordre par un système de deux équations différentielles d'ordre 1. En introduisant la vitesse v, on obtient le système : $v = \dot{x}$ et $\dot{v} = -sinx$.

```
from scipy import * (chargement du module à usage scientifique)
from pylab import * (chargement du module de calcul numérique)
from scipy.integrate import odeint (chargement de la fonction permettant la résolution des équations différentielles ordinaires du premier ordre)
def deriv(syst,t) : (création de la fonction « deriv »)
    x=syst[0] (les valeurs de x sont rangées dans la colonne « zéro » d'un tableau 2D « syst »)
    v=syst[1] (et les valeurs de v dans la colonne « un »)
    dxdt=v (définition de la vitesse)
    dvdt=-sin(x) (valeur de l'accélération)
    return[dxdt,dvdt] (récupération des résultats)

t=linspace(tmin,tmax,nbpt) (création de la liste des temps successifs, instant de départ tmin, instant d'arrivée tmax, et nombre de points nbpt, valeurs à choisir)

liste=[A1,A2,A3,…] (création de la liste des amplitudes angulaires en radian, valeurs à choisir)
for i in liste : (démarrage de la boucle permettant de faire varier les conditions initiales)
    CI=array([i,0]) (création du tableau 2D des conditions initiales)
    sols=odeint(deriv,CI,t) (résolution du système d'équations différentielles)
    x=sols[:,0] (récupération des valeurs de x dans la colonne « zéro » du tableau 2D « sols »)
```

v=sols[:,1] *(et des valeurs de v dabs la colonne « un »)*
plot(t,x) *(tracé des courbes)*
title('x(t)') *(affichage du titre)*
show() *(affichage du graphe)*

Commenter l'évolution de la période avec l'amplitude.

b) Évolution de la période en fonction de l'amplitude

Principe :

On part de la conservation de l'énergie mécanique pour le pendule lâché avec l'amplitude θ_0 sans vitesse initiale : $\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgLcos\theta = -mgLcos\theta_0$.

On en déduit $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{L}}\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}$.

On intègre ensuite sur un quart de période après avoir séparé les variables : $\int_0^{T/4} dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}}$.

Ce qui donne finalement $T = 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{cos\theta - cos\theta_0}}$.

Proposition de programme Python (*les fonctions qu'il est possible d'utiliser sont indiquées en italique*) :

* Création de la liste des abscisses (amplitudes θ_0 en radian) (*range*)
* Création d'une liste vide des ordonnées (périodes T en seconde)
* Création d'une boucle (*for*) qui, pour chacune des abscisses successives, définit (*def*) la fonction à calculer, en calcule la valeur (*quad(fonction, borne inférieure, borne supérieure)* du package « *scipi.integrate* » à charger préalablement), l'ajoute à la liste des ordonnées (*append*).
* Tracé de la courbe (*plot*, *show*)

Remarque : Attention, la commande quad renvoie un doublet de valeurs T,err
T est la période, err la majoration de l'erreur commise pour le calcul de l'intégrale.
Syntaxe : T,err = quad(fonction, borne inférieure, borne supérieure)
On peut appeler ensuite la valeur T ou l'erreur err :
print("periode",T)
print("erreur = ",e)

Commenter.

3) Expérience

S'assurer de l'absence de freinage (aérodynamique ou solide).
Déterminer à l'aide de l'accéléromètre (ou à défaut d'un simple chronomètre) et du rapporteur la période T des oscillations pour une amplitude initiale θ_0 allant de 5° à 20° par pas de 5°, puis ensuite de 30° à 70° par pas de 10°. Pour une bonne précision, on mesurera en fait 5 ou10 périodes.

Tracer la courbe $T(\theta_0)$.
Commenter.

II Frottement fluide

1) Étude théorique (lecture)

L'équation différentielle du mouvement du pendule pour les petits angles peut s'écrire :

$\ddot{\theta} + 2\sigma\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ où σ est un coefficient d'amortissement sans dimension.

La pseudo-période des petites oscillations s'écrit :

$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\sigma^2}}$ où T_0 est la période propre de l'oscillateur harmonique précédent.

La solution s'écrit $\theta(t) = \theta_0 e^{-\sigma\omega_0 t}cos(\omega t)$ avec les conditions initiales choisies, de pseudo-pulsation $\omega = \omega_0\sqrt{1-\sigma^2}$.

2) Étude expérimentale

On se propose de déterminer le coefficient d'amortissement σ, identique pour $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$.

Clipser sur la tige du pendule le volet en plastique de freinage aérodynamique.
Enregistrer la vitesse angulaire pour les petites oscillations et en observer l'enveloppe (allure exponentielle).
Importer les données obtenues dans le logiciel Regressi, faire la modélisation de la courbe, en déduire la pertinence du modèle et la valeur de σ (on pourra s'appuyer si nécessaire sur le protocole détaillé fourni en annexe à la fin du document).
À défaut, on mesurera l'amplitude d'un certain nombre de maximum, et on effectuera une régression linéaire sur une droite que l'on précisera.

III Frottement solide

1) Étude théorique (lecture)

L'équation différentielle du mouvement du pendule pour les petits angles peut s'écrire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \varepsilon\omega_0^2 K$$

où K est une constante positive introduite par le frottement solide et $\varepsilon = \pm 1$ de façon à ce que le frottement s'oppose toujours au déplacement.

Pendant la première demi-période, $\varepsilon = +1$ et la solution est, toujours avec $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\theta(t) = (\theta_0 - K)cos\omega_0 t + K$$

Pendant la seconde demi-période, $\varepsilon = -1$ et la solution est, avec $\theta(T_0/2) = 2K - \theta_0$ et $\dot{\theta}(T_0/2) = 0$ afin de raccorder avec la demi-période précédente :

$$\theta(t) = (\theta_0 - 3K)cos\omega_0 t - K$$

Les oscillations se font donc avec la même période T_0 que celle de l'oscillateur harmonique mais avec une décroissance linéaire de l'amplitude des oscillations de 4K par période.

Pour la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, l'évolution est globalement la même mais avec une décroissance linéaire de $4K\omega_0$ par période.

2) Étude expérimentale

On se propose de déterminer le coefficient K.
Serrer légèrement le frein situé au niveau de l'axe de rotation du pendule et permettant d'introduire le frottement solide.
Enregistrer la vitesse angulaire pour les petites oscillations et en observer l'enveloppe (fonction affine).
En mesurant l'amplitude d'un certain nombre de maximum, et en effectuant une régression linéaire sur une droite que l'on précisera, vérifier la pertinence du modèle et déterminer la valeur de K.

* * *

Annexe : utilisation du logiciel Regressi pour la simulation

Depuis Regressi, ouvrir le fichier au format « csv » contenant les données expérimentales issues de DynNova et donnant l'évolution de la vitesse angulaire ω du pendule en fonction du temps t. La courbe $\omega(t)$ apparaît dans l'onglet « Graphe ».

La pseudo période T des oscillations amorties peut se mesure à l'aide du réticule (icône « Outils graphiques »).

Puis dans l'onglet « Modèle », utiliser l'icône « Modèles » pour choisir celui désiré (oscillations pseudo-sinusoïdales avec amortissement exponentiel) : Oscillations -> Amorties (période).
On obtient alors la pulsation sous la forme $a + be^{-t/\tau}cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$.

Le déplacement à l'aide de la souris de deux curseurs verticaux permet si nécessaire de ne sélectionner que la meilleure partie de la courbe.

La recherche des paramètres (a, b, T, ϕ, t) se fait avec le bouton « Ajuster ».
Le premier résultat proposé peut donner une courbe simulée assez éloignée des points expérimentaux.

L'action combinée sur le bouton « Ajuster » et sur les autres les boutons de modification (> ou < pour faire varier le paramètre de 2%, >> ou << pour faire jouer un facteur 2) permet de rapprocher progressivement et par tâtonnements successifs la courbe simulée des points expérimentaux.

Le logiciel calcule alors les valeurs des paramètres optimisant la corrélation avec les points expérimentaux, sur la base du modèle mathématique choisi. Il trace le graphe du résultat et fournit les valeurs des paramètres, avec leur intervalle de confiance.