

8. Tir d'un projectile. (tiré du document : cours, Dynamique 2/2)

8.1 Modèle sans frottement :

L'action sur le système se réduit alors à son poids.

On retrouve une situation déjà étudiée au chapitre cinématique, avec un mouvement d'accélération uniforme (ici l'accélération de la pesanteur).

Nous avons obtenu une trajectoire parabolique.

8.2 Modèle avec frottement :

Approche numérique : prise en compte de la traînée, comparaison au modèle sans frottement.

L'expression de la force de traînée à envisager dépend des conditions du mouvement :

- type de fluide, par sa viscosité, sa masse volumique,
- taille caractéristique de l'objet,
- vitesse de l'objet.

En seconde année, on mettra en place un critère de choix (selon valeur du nombre de Reynolds : $R_e = \rho v L / \eta$ ou ρ est la masse volumique du fluide, η sa viscosité, v la vitesse du mobile relativement au fluide et L une longueur caractéristique de l'objet en mouvement).

8.21 Cas d'un frottement linéaire.

Ce modèle convient en réalité pour le cas de vitesses peu élevées, dans des fluides peu denses, pour des objets de dimension faible...

Il présente l'intérêt de conduire à des équations du mouvement sous forme d'équation différentielle linéaire, dont on connaît des solutions analytiques.

Pour le modèle linéaire, la force de frottement s'écrit : $\vec{F} = -k \cdot \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse du mobile et k une grandeur constante.

Par la deuxième loi de Newton :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k \cdot \vec{v} + m\vec{g}$$

Pour un mouvement décrit dans le plan (O, x, z) où (Oz) est l'axe vertical ascendant, cela se traduit en projetant sur la base $(\vec{e}_x; \vec{e}_z)$ par le système d'équations :

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k \cdot v_x$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -k \cdot v_z - mg$$

v_x et v_z sont les coordonnées du vecteur-vitesse.

Après résolution, compte tenu de la condition initiale sur la vitesse :

$$\vec{v}(0) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{e}_x + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \vec{e}_z$$

où la vitesse initiale a pour module v_0 et fait un angle α avec l'horizontale, on tire :

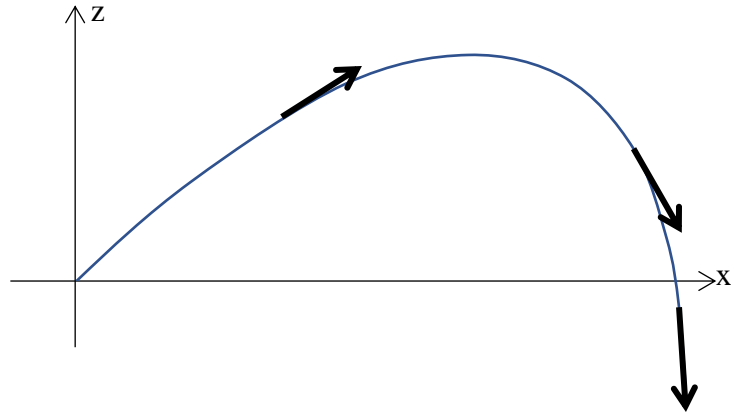
$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$v_z(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{mg}{k} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

avec $\tau = m/k$, constante de temps du phénomène.

L'expression des coordonnées $x(t)$ et $z(t)$ peut s'obtenir par une seconde intégration, qui demande un calcul un peu pénible.

La trajectoire aura l'allure ci-contre, dite en « parabole amortie ».



Constatons que pour t suffisamment grand, la vitesse devient très faible pour sa composante horizontale v_x tandis que sa composante verticale v_z tend vers $-mg/k$. Le mobile tombe alors verticalement.

8.22 Cas d'un frottement quadratique.

Prenons maintenant l'exemple d'un frottement quadratique, plus réaliste pour beaucoup de situation réelles, telles que les mouvements de balles ou ballons dans l'air lors d'activités sportives...

Pour le modèle quadratique, la force de frottement s'écrit : $\vec{F} = -k \cdot v \cdot \vec{v}$

où \vec{v} est la vitesse (vectorielle) du mobile et v est le module de la vitesse et k une grandeur constante (k aura une valeur et une unité différente de la constante k introduit au chapitre précédent pour le modèle linéaire).

Par la deuxième loi de Newton :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k \cdot v \vec{v} + m\vec{g}$$

Pour un mouvement décrit dans le plan (O, x, z) où (Oz) est l'axe vertical ascendant, en projetant sur la base $(\vec{e}_x; \vec{e}_z)$.

Le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v}(t) = v_x \vec{e}_x + v_z \vec{e}_z$$

Son module est donc :

$$v = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$

La RFD se traduit par le système d'équations :

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k \cdot \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \cdot v_x$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = -k \cdot \sqrt{v_x^2 + v_z^2} \cdot v_z - mg$$

Cette fois ci, le système d'équation différentielles obtenu est non linéaire, et de plus les équations différentielles sont liées entre elles : les variations temporelles de v_x dépendent de v_x et v_z et les variations temporelles de v_z dépendent de v_x et v_z .

Ce système n'admet pas de solutions analytiques pour $v_x(t)$ et $v_z(t)$. Seule une résolution numérique est envisageable. Nous aborderons cela à l'occasion d'un TP d'informatique, en résolvant numériquement au moyen d'un algorithme écrit sur Python.

Analyse en ordre de grandeur. Nature de la trajectoire.

On peut s'interroger sur l'adéquation du modèle de frottement dans divers cas réels :

- tir d'un volant de badminton,
- tir d'un ballon de football,
- tir d'une balle de fusil.

Ces trois phénomènes peuvent rentrer dans la même description (tir dans le champ de pesanteur, avec frottement) et mènent pourtant à des trajectoires très différentes : parabole très amortie pour le volant de badminton, peu amortie pour le ballon, et trajectoire quasi rectiligne pour la balle de fusil sur une distance courte.

En appliquant le modèle quadratique, la RFD donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -k \cdot v \vec{v} + m \vec{g}$$

Posons :

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{u}$$

où \vec{u} est un unitaire tangent à la trajectoire.

Il vient :

$$\frac{d(v\vec{u})}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v^2 \vec{u} + \vec{g}$$

soit :

$$\frac{d(v\vec{u})}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot \left(v^2\vec{u} + \frac{m}{k}\vec{g} \right) \quad (1)$$

Introduisons à ce niveau la vitesse limite, atteinte par définition quand la vitesse ne varie plus donc :

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

Cas n°1 : tant que $v \ll v_{lim}$,

En particulier quand la vitesse initiale de module v_0 est telle que $v_0 \ll v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

Le terme $v^2\vec{u}$ restera très faible devant $\frac{m}{k}\vec{g}$ durant le mouvement.

Alors l'équation (1) devient

$$\frac{d(v\vec{u})}{dt} \simeq -\vec{g} \quad (2)$$

On se rapproche du tir sans frottement, menant à une trajectoire parabolique. La trajectoire est quasi parabolique, une étude précise n'apportant qu'un faible correctif par rapport au modèle sans frottement.

Exemple : on lance un caillou, assimilé à une sphère de rayon $R = 1,0$ cm, de masse $m = 10$ g. Le coefficient de pénétration dans l'air est alors $C_x = 0,5$, la section de frottement est de valeur $S = 3,5 \cdot 10^{-4}$ m², la masse volumique de l'air dépend de la pression et de la température, et aux conditions usuelles vaut $\rho = 1,3$ kg.m⁻³.

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

où $k = \rho S C_x / 2$, ce qui amène $v_{lim} = 30$ m.s⁻¹ = 100 km.h⁻¹.

Le projectile retrouvant le sol avant que la pesanteur ne l'ait accéléré, on aura une trajectoire quasi-parabolique si le jet n'est pas trop rapide.

Cas n°2 : si $v \gg v_{lim}$,

En particulier quand la vitesse initiale de module v_0 est telle que $v_0 \gg v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

Cette fois le terme $v^2\vec{u}$ est grand devant $\frac{m}{k}\vec{g}$, du moins dans la première partie du mouvement.

Tant que cette condition est vérifiée, le mouvement est régi approximativement par l'équation différentielle :

$$\frac{d(v\vec{u})}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v^2\vec{u} \quad (3)$$

La variation de vitesse étant colinéaire à la vitesse, le mouvement reste donc quasi-rectiligne durant cette phase. Mais le frottement de l'air va ralentir le mobile, plus ou moins rapidement, et l'on arrivera ensuite dans le cas n°3...

Durant cette phase rectiligne avec ralentissement du mouvement, il est aisé de déterminer une durée caractéristique de décroissance de la vitesse.

En projetant sur la direction de la vitesse (3) s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} \cdot v^2 \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m} \cdot dt \quad \text{en séparant les variables}$$

La relation s'intègre entre $(t = 0, v(0) = v_0)$ et $(t, v(t))$:

$$\frac{-1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{k}{m} \cdot t$$

Ainsi la durée $t_{1/2}$ pour que la vitesse soit divisée par 2 répond à :

$$\frac{-2}{v_0} + \frac{1}{v_0} = -\frac{k}{m} \cdot t_{1/2}$$

qui mène à

$$t_{1/2} = \frac{m}{kv_0}$$

Une démarche analogue donne une durée $t_{10\%}$ pour diviser par 10 la vitesse initiale v_0 :

$$t_{10\%} = \frac{9m}{kv_0}$$

Quand la vitesse aura suffisamment diminué pour que la condition $v(t) \gg v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$ soit remise en cause, la trajectoire va notablement d'infléchir, l'action de pesanteur devenant plus significative. Si la trajectoire est interrompue par un impact ayant lieu assez tôt, le tir sera quasiment rectiligne (tir dit « tendu »).

Cas n° 3 : si la vitesse ne respecte aucune des conditions envisagées aux cas n°1 et cas n°2, les termes $v^2\vec{u}$ et $\frac{m}{k}\vec{g}$ auront des poids comparables dans l'équation (1). Le recours à une intégration numérique est alors nécessaire, comme il a été envisagé dans l'introduction de ce chapitre.

Pour illustrer ce propos sur un cas concret, le cas du **volant de badminton** va nous amener à inventorier les trois cas :

Sur la première phase du mouvement, juste après la frappe, le mobile est dans le cas n°1. Trajectoire rectiligne ($v \gg v_{lim}$), mais amortissement amenant une décroissance rapide de la vitesse.

Dans la seconde phase, le volant suit une parabole amortie, décrit par le cas n°3, où le terme de pesanteur et le terme de frottement fluide jouent des rôles de même ordre de grandeur.

Enfin, durant la troisième phase, où la vitesse est suffisamment faible, le volant retombe sous l'effet principal de la pesanteur ($v \ll v_{lim}$)

