Complément séance Simulation sur Python 2/2 :

1. Non isochronisme : autre approche du calcul de la période.

On envisage le pendule pesant constitué d'une barre de masse m = 0,20 kg et de longueur a = 0,50 m. Son moment d'inertie est $J = ma^2/3$.

On souhaite évaluer la période d'oscillation T du pendule pesant, en la calculant pour diverses amplitudes. Proposer une méthode donnant accès à cette période à partir de la méthode d'Euler (donc sans procéder à l'intégration telle que conduite dans la partie précédente).

En employant une boucle, en déduire un tracé du graphe $T(\theta_o)$ décrivant l'évolution de cette période T avec la valeur θ_o de l'amplitude, pour θ_o évoluant de 5° à 175°.

2. Méthode d'Euler : Euler explicite et Euler implicite.

Pour introduire ce sujet sur une exemple, considérons le modèle de l'équation de l'oscillateur harmonique. Correspondant à une équation différentielle linéaire du deuxième ordre de forme : $\ddot{\mathrm{x}} + {\omega_o}^2.\mathrm{x}(t) = 0$

On sait que les solutions x(t) de cette équation sont de forme sinusoïdale :

$x(t) = A.\cos(\omega_o t) + B.\sin(\omega_o t) = D.\cos(\omega_o t + \phi)$

ce qui permettra de confronter les résultats numériques obtenus avec les résultats théoriques attendus.

Les ocntantes d'intégrations sont déterminées par les conditions initiales : valeurs x(0) et $\dot{\mathrm{x}}(0)$.

La méthode numérique de résolution selon Euler consiste à décomposer l'équation différentielle du second ordre en un système de deux équations différentielles du premier ordre en introduisant la fonction dérivée de x(t) : v(t) = dx/dt.

Soit le système :

$$\frac{dv}{dt} = -{\omega_o}^2.\mathrm{x}(t)$$

$$et \quad v(t) = \frac{d\mathrm{x}}{dt}$$

Les variations respectives dx et dv des fonctions x(t) et v(t) seront évaluées par itération, selon :

$dx = v.dt$ et $dv = -{\omega_o}^2.x.dt$

Dans la méthode d'Euler explicite, ces variations seront évaluées à partir des valeurs x(t) et v(t) considérées à l'instant t donnant ainsi accès aux valeurs qu'elles prendront à l'instant t + dt.

Dans la méthode d'Euler implicite, les variations seront évaluées à partir des valeurs x(t + dt) et v(t + dt) considérées à l'instant t + dt.

On pourra expérimenter et comparer les résultats des deux méthodes en rédigeant un programme els mettant en jeu ou en faisant fonctionner le programme fourni : **Euler explicite ou implicite.py**

Valeurs numériques : on peut choisir $\omega_o = 1$ et des conditions initiales : x(0) = 2 et $\dot{x}(0) = 0$.

Sources :

https://www.f-legrand.fr/scidoc/docimg/numerique/euler/euler/euler.html

https://www.f-legrand.fr/scidoc/docimg/numerique/euler/implicite/implicite.html

Méthode d'Euler explicite - Définition

Soit une équation différentielle pour la fonction y de la variable t de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \qquad (1)$$

avec la condition initiale

$$y(0) = y_0 \qquad (2)$$

La variable t sera le temps, du moins si l'équation traduit une évolution temporelle. Dans le cas d'un système différentiel du premier ordre, y désigne une matrice colonne comportant les fonctions inconnues.

L'intégration numérique d'une équation de ce type consiste à calculer des valeurs approchées de y sur un intervalle [0, T]. Pour cela, on divise cet intervalle en N sous-intervalles de longueur h=T/N et on définit les instants :

$$t_n = nh \qquad (3)$$

où l'entier n varie de 0 à N. Dans la méthode d'Euler explicite, la valeur approchée à l'instant t_{n+1} est obtenue à partir de la précédente par

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \qquad (4)$$

Méthode d'Euler implicite - Définition et stabilité

La méthode d'Euler est présentée dans Méthode d'Euler explicite. On reprend ici les mêmes notations. La méthode d'Euler implicite consiste à chercher la valeur approchée à l'instant t_{n+1} avec la relation suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \qquad (1)$$

Cette méthode consiste donc à prendre la dérivée à la fin de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$ au lieu de la prendre au début. La valeur y_{n+1} est obtenue par résolution d'une équation. Dans le cas d'un système différentiel, le nombre d'équation à résoudre est égal aux nombres de fonctions inconnues.

Pour étudier la stabilité, on considère l'équation linéaire suivante :

$$\frac{dy}{dt} = qy(t) \qquad (2)$$

Pour la condition initiale y(0)=1, la solution est :

$$y(t) = \exp(qt) \qquad (3)$$

Pour cette équation, la méthode d'Euler implicite s'écrit :

$$y_{n+1} = y_n + hqy_{n+1} \qquad (4)$$

Les valeurs approchées obtenues par cette méthode sont donc :

$$y_n = \frac{y_0}{(1-hq)^n} \qquad (5)$$

On pose z = hq. Le domaine de stabilité est défini comme le domaine du plan complexe où la suite précédente est bornée, c'est-à-dire :

$$|1-z| \geq 1 \qquad (6)$$

Le domaine de stabilité est donc tout le plan complexe à l'exclusion du disque de centre z = 1 et de rayon 1. Le demi espace Re(z)<0 est donc entièrement dans le domaine de stabilité. Si la partie réelle de q est négative, la solution approchée à toujours le même comportement que la solution exacte, c'est-à-dire qu'elle tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.