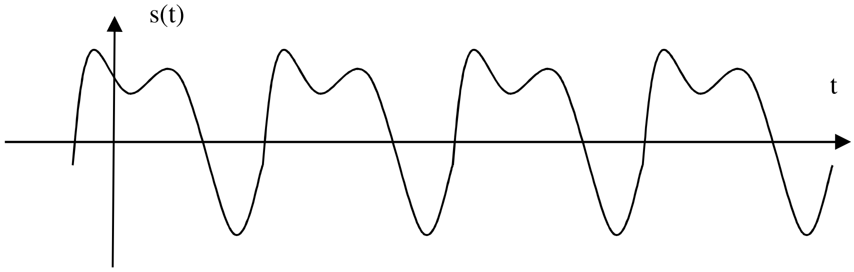
1.2 Analyse spectrale :

Dans le cas d'un signal périodique, une forme de signal va se répéter dans le temps, en un point donné de l'espace.



La période T est la durée correspondant au « motif temporel » du signal. La fonction s(t) prendra la même valeur à des instants séparés d'u nombre entier de périodes T : $s(t + T) = s(t)$.

La théorie de Fourier permet de représenter ce signal comme une somme de termes sinusoïdaux. Dans le cas général, cette somme comporte un nombre infini de termes :

$$s(t) = S_0 + S_1 \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + S_2 \cos\left(2\omega_1 t + \varphi_2\right) + \ldots + S_n \cos\left(n.\omega_1 t + \varphi_n\right) + \ldots$$

S_0 est un terme constant. $S_0 = \langle s(t) \rangle$ puisque tous les autres termes ont une valeur moyenne nulle. S_0 sera la composante continue de s(t).

Le premier terme variable est dit terme harmonique fondamental. Sa pulsation est $\omega_1 = 2\pi/T$, sa fréquence f_1 est l'inverse de la période du signal s(t) : $f_1 = 1/T$.

Les termes variables suivants sont les harmoniques de rang n, de pulsations $\omega_n = n.2\pi/T$. Leurs fréquences sont multiples de la fréquence fondamentale : $f_n = n.f_1$.

Les amplitudes S_n et les phases φ_n des différentes harmoniques sont calculables grâce aux formules de Fourier. Ce calcul ne sera pas demandé. Des logiciels permettent un traitement analytique automatisé.

La décomposition de Fourrier donnant : $s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos\left(n.\omega_1 t + \varphi_n\right)$

sera exécutée par un algorithme permettant un calcul approché, mais rapide. Les résultats sont a priori traduits par deux graphes :

- un graphe d'amplitude donnant les S_n pour les différentes fréquences f_n ;
- un graphe de phase donnant les φ_n pour les différentes fréquences f_n.

La perception que nous avons des signaux est généralement liée à la valeur moyenne du carré de leur amplitude ; on restreindra donc usuellement l'analyse spectrale au graphe d'amplitude.

Pour des rangs n suffisamment grands, les S_n décroissent fortement en pratique, atteignant rapidement des valeurs négligeables. L'analyse spectrale pourra donc se restreindre à un nombre limité d'harmoniques.

L'analyse spectrale fournit donc la description fréquentielle d'un signal donné.

Synthèse d'un signal :

Inversement, il est possible de reconstituer un signal périodique donné en sommant un ensemble de termes de termes sinusoïdaux, nommés ***termes harmoniques*** du signal. (voir exemple plus bas).

Chacune de ces harmoniques est une fonction sinusoïdale de pulsation ω_n multiple de la ***pulsation fondamentale*** $\omega_1 = 2\pi/T_1$, où T_1 est la période du signal à synthétiser.

L'harmonique d'ordre n : $d_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$ a donc une pulsation $\omega_n = 2\pi n/T_1 = n\omega_1$.

Elle interviendra avec une amplitude égale à un coefficient d_n et avec une phase à l'origine φ_n qu'il est possible de calculer.

Dans le cas de fonctions f(t) réelles (ce qui sera le cas en physique), le développement en série de Fourier peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{n\to\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t)}$$

pour n entier naturel non nul.

Les coefficients de la décomposition se calculent par :

$$a_o = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$$

le premier terme $a_o / 2$ représente donc la ***valeur moyenne*** de f(t).

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_1 t.dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_1 t.dt$$

pour n entier naturel non nul.

Soit donc : $\boxed{a_n = 2\langle f(t).\cos n\omega_1 .t\rangle}$ et $\boxed{b_n = 2\langle f(t).\sin n\omega_1 .t\rangle}$

Traduit d'un point de vue physique, un signal périodique f(t) quelconque (triangulaire, créneau, succession de rampes, ...) apparaît donc comme une somme de termes sinusoïdaux, de pulsations multiples de $\omega_1 = 2\pi/T_1$, et de la valeur moyenne $\langle f(t)\rangle$ du signal.

Cette valeur moyenne est nommée la ***composante continue*** du signal.

La composante sinusoïdale de pulsation ω, donc de période T identique à celle du signal, correspondant à n = 1 dans les formules précédentes, est nommée le ***fondamental***.

Les termes de pulsation $n\omega$ (pour n > 1) sont nommés ***harmoniques de rang n*** du signal.

Par la trigonométrie, on montre que le signal f(t) pourra aussi se décomposer sous la forme :

$$\boxed{f(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{1}^{\infty} d_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)}$$

où $d_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$; $\text{tg}\varphi_n = - b_n/a_n$; $\cos\varphi_n = a_n/d_n$

Aucune exigence n'est posée quant à la connaissance ou à l'utilisation de ces formules. Retenons qu'elles existent et permettent le calcul des amplitudes des harmoniques intervenant dans un signal donné.

On remarquera que :

- pour une fonction f(t) paire, soit telle que f(-t) = f(t), les coefficients b_n sont tous nuls, (la fonction sinus est impaire)
- pour une fonction f(t) impaire, soit telle que f(-t) = -f(t), les coefficients a_n sont tous nuls (la fonction cosinus est paire).

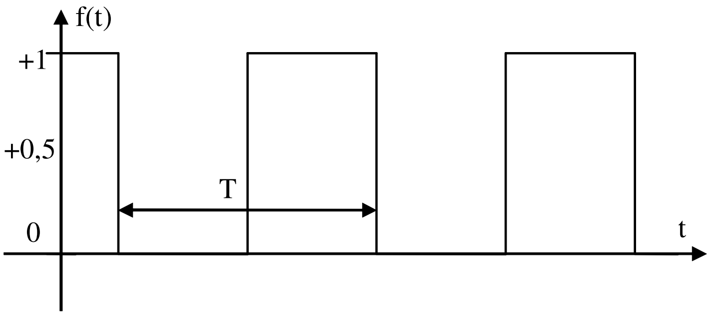
Exemple : synthèse d'un signal créneau

Il est présenté ci-dessous, à titre d'exemple, une synthèse d'un signal créneau du type f(t) = +1 ou f(t) = 0. La valeur moyenne du signal vaut 0,5 et le signal est pair.

On notera que la "qualité" du signal synthétisé s'améliore avec le nombre d'harmoniques y intervenant.

Signal à synthétiser :

Posons : $\omega = 2\pi / T$.



Pour des raisons spécifiques de ce signal, il se trouve que le calcul des amplitudes des harmoniques de rang pair (n = 2p) mène à un résultat nul. Seules les harmoniques de rang impair (n = 2p+1) participeront dans cet exemple au signal f(t).

Les graphes temporels sont tracés ci-dessous avec une abscisse correspondant au rapport t / T.

Représentation des harmoniques 1, 3 et 5 sur un même graphe.

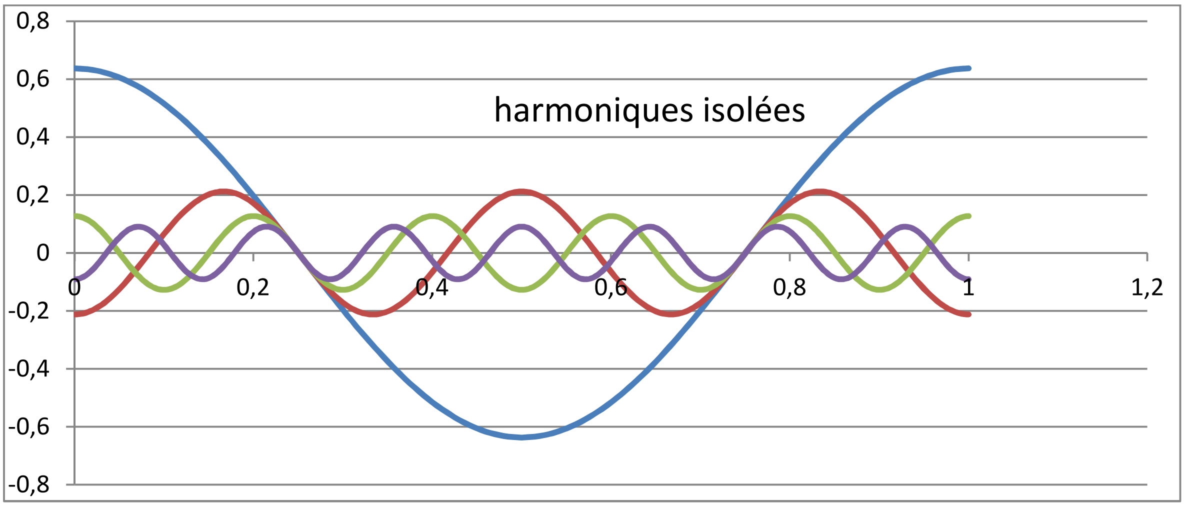
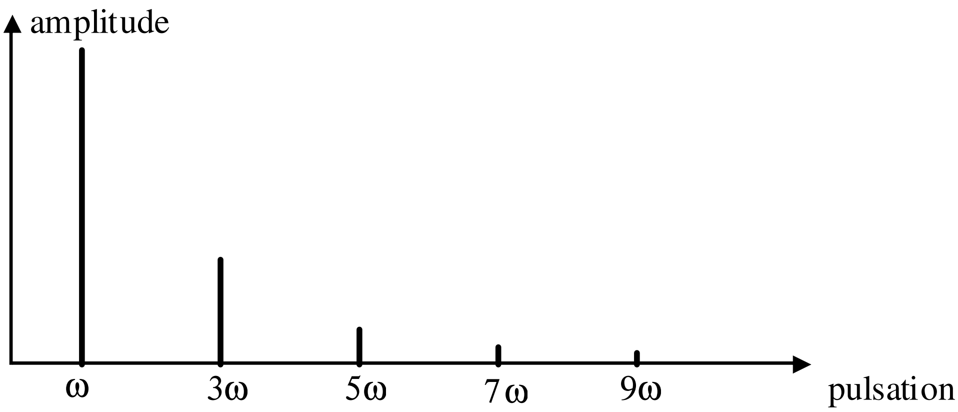
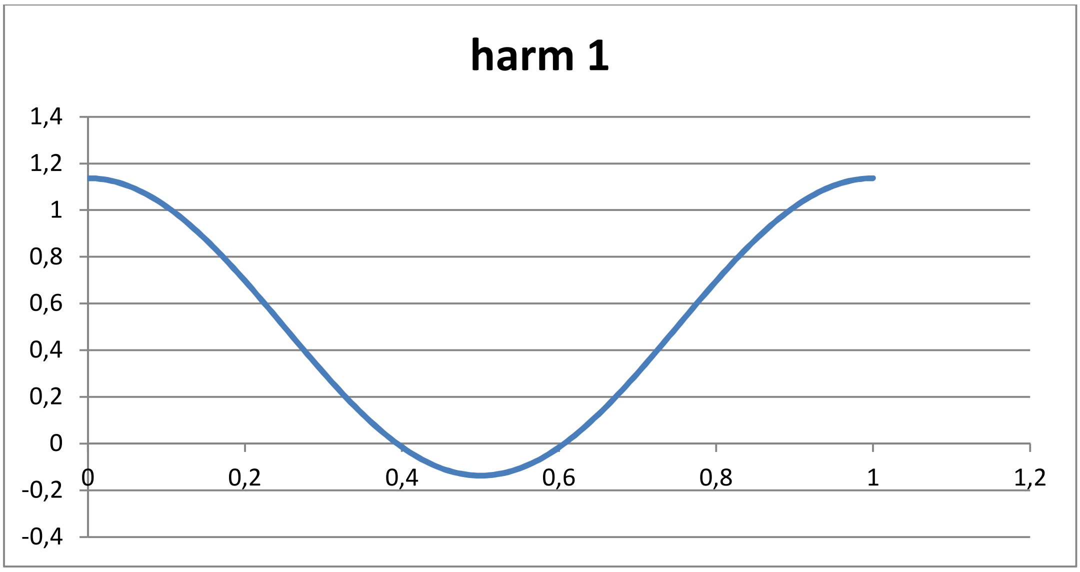


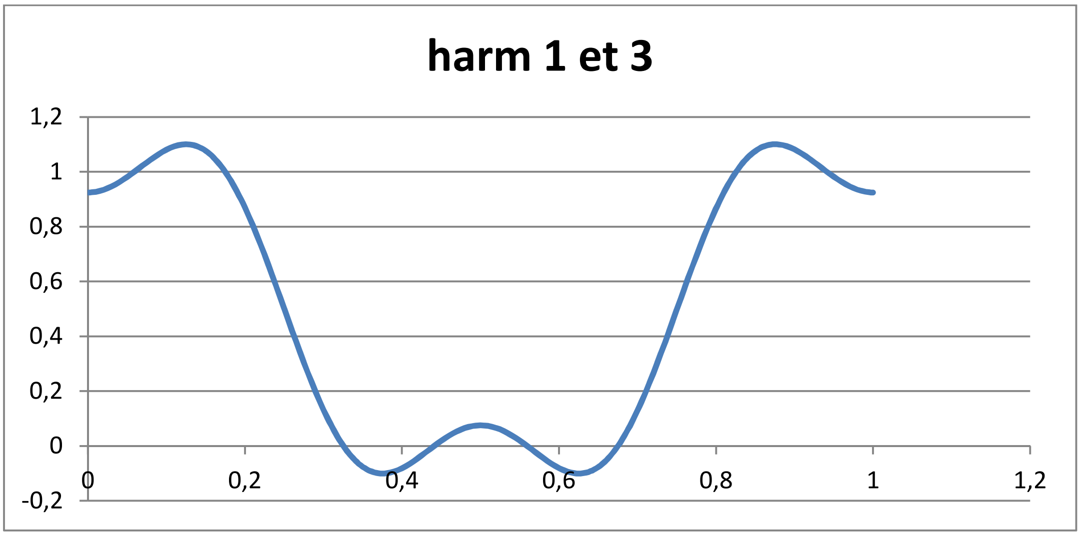
Diagramme d'amplitude des harmoniques



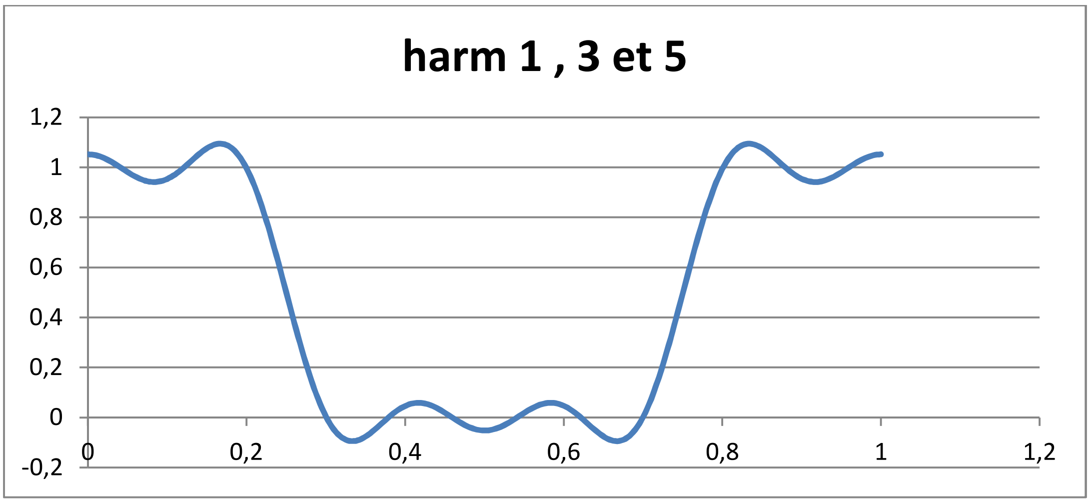
Harmonique de rang 1 : (fondamental)



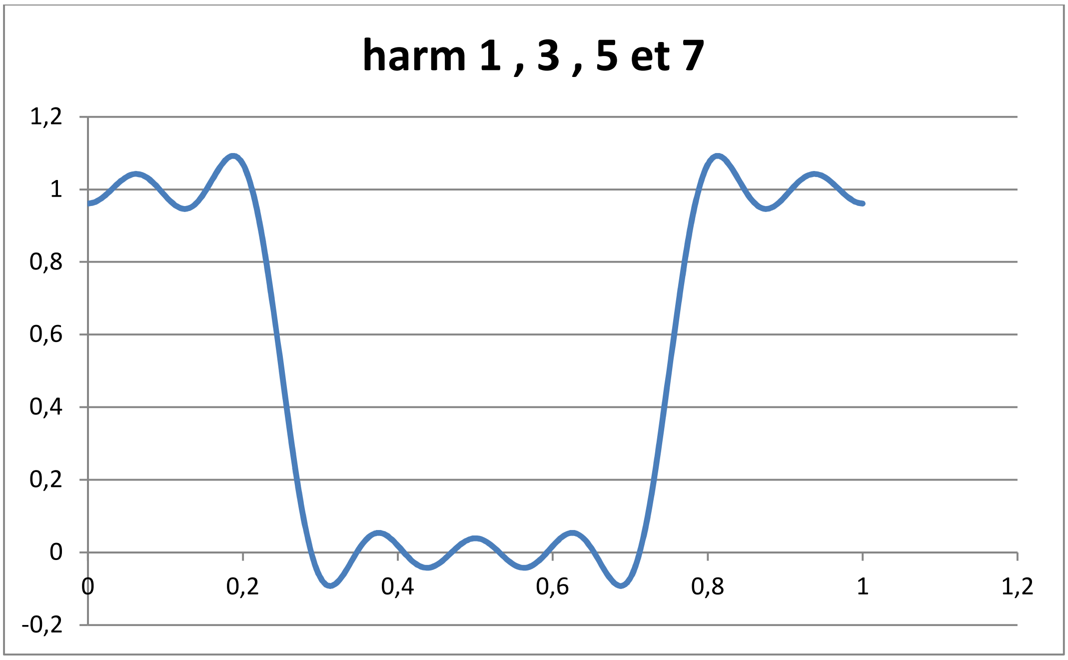
Somme des harmoniques de rangs 1 et 3 :



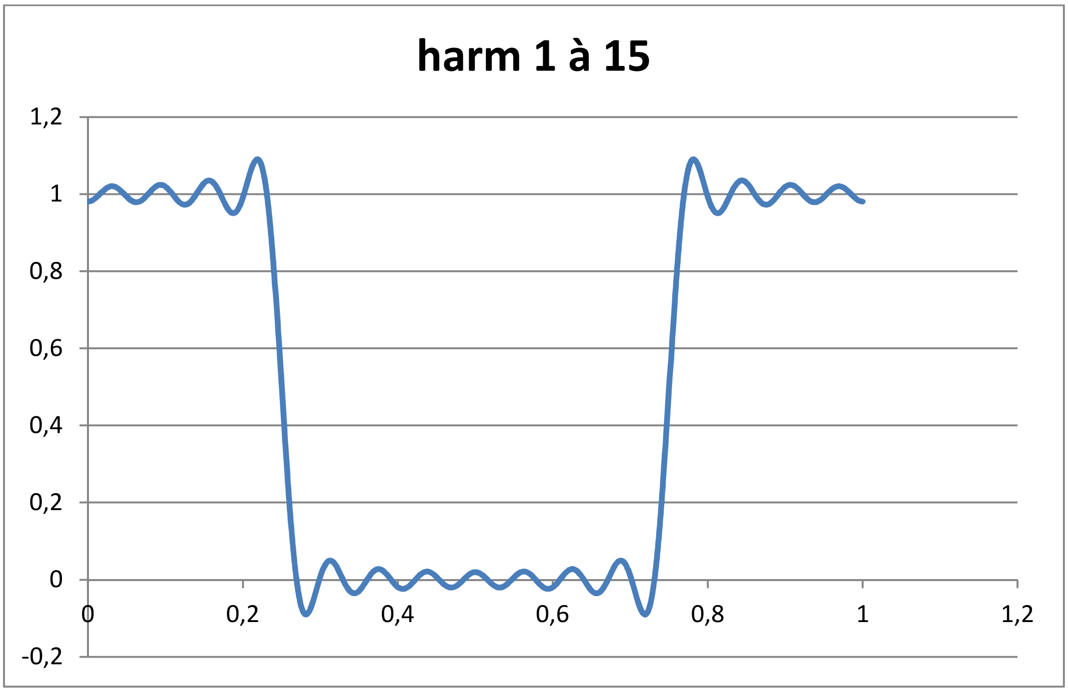
Somme des harmoniques de rangs 1,3 et 5 :



Somme des harmoniques de rangs 1, 3, 5 et 7 :



Somme des harmoniques de rangs 1 à 15 :



Le graphe de la fonction à synthétiser est déjà quasiment reconstitué, le signal obtenu s'identifie pratiquement à un signal créneau.

Ainsi, tout **signal périodique**, de forme quelconque, peut s'interpréter comme une **superposition de signaux sinusoïdaux** de différentes pulsations.

Il sera donc possible d'étudier la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque, en s'appuyant sur le théorème de superposition des états linéaires (théorème de Helmholtz) : cette réponse apparaîtra comme la somme des réponses relatives à chacun des termes sinusoïdaux composant le signal.