Etude mathématique des courbes de résonance dans le cas de systèmes linéaires du second ordre

Un système linéaire est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficient constant. Lorsque le système est sollicité par un excitateur sinusoïdal de fréquence f donnée (de pulsation ω = 2π.f), la réponse physique du système correspond à la solution particulière de l'équation, où l'excitateur intervient comme un second membre d'expression :

$a(t) = A_o.\cos(\omega t) = A_o.\cos(2\pi f.t)$ en fonction du temps t.

La grandeur de réponse u(t) dans le système est donc alors de forme : **$U(t) = U_o.\cos(\omega t + \phi)$**

La résonance est le phénomène physique consistant à un passage de la grandeur observée (intensité, tension, élongation d'un ressort...) par un extrémum d'amplitude, généralement un maximum, pour une fréquence particulière de l'excitateur.

L'évolution fréquentielle de l'amplitude U(ω) est accompagnée d'une évolution de sa différence de phase ϕ(ω) vis à vis de l'excitateur.

La recherche de la solution particulière sinusoïdale (dite solution de régime forcé) se fait aisément par l'introduction de la notation complexe, qui amène à transformer l'équation différentielle décrivant le problème en une équation algébrique sur la grandeur complexe $\tilde{u}(t) = U_o \exp(i\varphi) . exp(i\omega t)$ associée à la grandeur étudiée. Le second membre sinusoïdal est lui-même représenté par $\tilde{a}(t) = A_o. exp(i\omega t)$

La mise sous forme canonique des expressions conduit à exprimer une fonction à valeurs complexes dépendant uniquement de la pulsation ω, dans laquelle le temps n'est plus présent, le facteur $\exp(i\omega t)$commun à tous les termes ayant été éliminé. $\tilde{u}(t) = U_o \exp(i\varphi)$ dont le module correspondra à l'amplitude $U_o(\omega)$ et dont l'argument sera l'avance de phase de la réponse sur l'excitateur ϕ(ω).

On conduit en général l'étude sur une variable adimensionnée, $x = \omega/\omega_o$ où ω_o est la pulsation propre, grandeur caractéristique dépendant uniquement des paramètres du système.

Une seconde grandeur, appelée facteur de qualité, notée Q, amènera des comportements différents du système. Ce paramètre est lui aussi adimensionné, et est inversement proportionnel aux effets d'amortissement existant dans le système (frottement, résistance électrique...).

Mathématiquement, le problème se ramène à l'étude d'une fonction complexe de x, notée $\widetilde{H}(ix)$ paramétrée par Q, et à celle des fonctions module H(x) et argument ϕ(x).

L'obtention de la fonction argument se fait classiquement par la fonction arctan(Im/Re). La fonction arctan comportant une indétermination modulo π, celle-ci peut être levée par un examen des valeurs de la fonction complexe dans le plan complexe. La fonction phase doit varier en suivant quelques principes dictés par la physique :

- on a une valeur unique pour une fréquence donnée
- la phase ϕ(x) évoluera de façon continue avec la variable x
- Les valeurs choisies doivent rendre compte simplement des observations réalisées. Per exemple à fréquence nulle, l'avance de phase de l'élongation sur l'excitateur sera nulle.

Par nature, les grandeurs x et Q seront forcément positives.

Les deux formes classiques de fonction complexe sont :

1°. Réponse de type :

$$\boxed{\widetilde{H}(ix) = \frac{1}{1 + iQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

Soit en module :

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Et en argument :

$$\varphi(x) = -\arctan\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

2°. Réponse de type :

$$\boxed{\widetilde{H}(ix) = \frac{1}{(1 - x^2) + i\frac{x}{Q}}}$$

Soit en module :

$$\widetilde{H}(ix) = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Et en argument :

$$\varphi(x) = -\arctan\left(\frac{\frac{x}{Q}}{(1 - x^2)}\right)$$

Dans les deux cas, l'étude est habituellement conduite sommairement en examinant les valeurs de H(x) et de ϕ(x) aux limites, c'est à dire pour x → 0 (fréquence faible) et pour x → ∞.

<u>Pour le cas (1°) :</u>

Il y a un maximum évident de H pour x = 1 ; ϕ passe alors par 0. Ceci est indépendant de la valeur du paramètre Q. La résonance sera d'autant plus marquée que Q est grand (faibles effets d'amortissement dans le système).

<u>Pour le cas (2°) :</u>

Une difficulté apparaît. On teste l'existence ou non d'un extrémum de H(x) selon la valeur de Q en dérivant la fonction :

$$D(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

.

En effet, le numérateur étant invariant dans H(x), la fonction H(x) ne présentera de maximum que pour un minimum de D(x), soit pour dD(x)/dx = 0.

Le calcul conduit alors à deux solutions : x = 0 (sans intérêt)

et

$$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Qui n'existe qu'à condition d'avoir Q > 1/√2.

La **résonance** ne se produit donc **que si : Q > 1/√2**.

La pulsation (resp. la fréquence) de résonance ainsi obtenue sera donc

$$\omega_r = \omega_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \qquad soit \quad f_r = f_o \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

La résonance, quand elle est marquée (Q grand) aura lieu à une fréquence proche de la fréquence propre du système (juste un peu plus faible). Pour Q faible, la résonance est peu marquée, et la fréquence de résonance est nettement plus faible que la fréquence propre.

Pour Q < 1/√2, le système n'aura donc **pas de résonance**.

Pour Q = 1/√2 on obtient une **résonance « dégénérée »** puisqu'elle se produirait pour x = 0 (fréquence nulle).

Comportements asymptotique par étude des fonctions équivalentes.

On peut affiner la représentation des graphes H(x) en particulier en recherchant une fonction équivalente dans un domaine donné de valeurs de x.

Par exemple :

pour x << 1, la fonction H(x) dans le cas 1°) répond à H(x) ≈ x/Q (asymptote oblique)

pour x >> 1, la fonction H(x) dans le cas 1°) répond à H(x) ≈ 1/(xQ) (asymptote hyperbolique)

Mieux encore, cette approche peut être appliquée directement à la fonction complexe.

Ainsi, sur le même exemple :

pour x << 1, la fonction $\widetilde{H}(ix)$ dans le cas 1°) répond à H(x) ≈ ix/Q

Par le module on retrouve immédiatement H(x) ≈ x/Q (asymptote oblique)

et la phase tend alors vers +π/2.

pour x >> 1, la fonction $\widetilde{H}(ix)$ dans le cas 1°) répond à H(x) ≈ 1/(ixQ)

Par le module on retrouve immédiatement H(x) ≈ 1/(xQ) (asymptote hyperbolique)

et la phase tend alors vers -π/2.

(Voir courbes de résonance).