Nombres complexes

1. Généralités :

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme : z = a + j.b   où : $j^2 = -1$

a est la partie réelle : a = Re(z)   et   b est la partie imaginaire : b = Im(z).

Remarque : On note usuellement "j" en physique le nombre noté "i" en mathématique afin d'éviter toute confusion avec les intensités électrique.

On définit le **module** du nombre complexe z = a + j.b par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
|z| est donc un <u>réel positif</u>.

Définissons pour finir **l'argument** d'un nombre complexe :

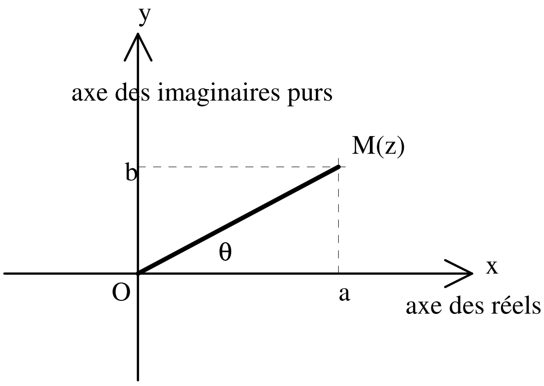
tout nombre complexe z = a + j.b peut s'écrire : $z = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + j\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Dans cette dernière expression, la partie entre parenthèses a toujours un module égal à 1 et l'on aura : $-1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq +1$ et $-1 \leq \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq +1$

On peut donc noter : a/|z| = cosθ   et   b/|z| = sinθ,

donc : z = |z|.(cosθ + j sinθ)   où θ est **l'argument** de z, noté Arg(z).

2. Représentation dans le plan complexe :



Un nombre complexe correspond à deux nombres réels (deux dimensions). On peut donc le représenter comme un point d'un plan, repéré par ses deux coordonnées.

En **coordonnées rectangulaires**, le nombre complexe z = a+j.b est représenté par un point M d'abscisse Re(z) = a et d'ordonnée Im(z).

Le point M est dit d'**affixe** z.

Par ailleurs, la distance d = OM est égale au module |z|,
l'angle θ = ((Ox),(OM)) correspond à l'argument de z noté Arg(z) (en repère orthonormé).

La donnée de |z| et de l'argument Arg(z) permet donc de situer le point représentatif M de z. |z| et θ = Arg(z) sont les **coordonnées polaires** de M.

La représentation dans le plan complexe permet une visualisation simple du passage des coordonnées rectangulaires au coordonnées polaires.

Par cette approche géométrique, on justifiera sans difficultés les relations :

$$\tan(Arg(z)) = \frac{Im(z)}{Re(z)} \quad ; \quad \sin(Arg(z)) = \frac{Im(z)}{|z|} \quad ; \quad \cos(\mathrm{Arg}(z)) = \frac{Re(z)}{|z|}$$

<u>Remarque importante :</u>
On remontera usuellement à la valeur de Arg(z) par :   Arg(z) = Arctan[Im(z) / Re(z)].

La donnée de tan[Arg(z)] fournit Arg(z) à π près.

On lèvera cette indétermination en calculant cos[Arg(z)] ou sin[Arg(z)] ; ou plus simplement par un rapide schéma du plan complexe en coordonnées rectangulaires (voir exercices d'électrocinétique en régime sinusoïdal forcé).

3. Notation exponentielle :

Cas des nombres complexes de module 1 :

Tout nombre complexe de module égal à 1 peut s'écrire : $z = \cos\theta + j\sin\theta$ avec $\theta \in [0 ; 2\pi[$.
On admet que pour toute valeur réelle de θ : $\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta} = \exp(j\theta)$.
On aura donc de même : $\cos(-\theta) + j\sin(-\theta) = e^{j(-\theta)} = \exp(-j\theta)$.

D'où les **formules d'Euler :** $\boxed{\cos\theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) / 2}$ $\boxed{\sin\theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta}) / 2j}$

La relation $\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta} = \exp(j\theta)$ fournit : $(e^{j\theta})^n = \exp(jn\theta) = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$

D'où la **formule de Moivre** : $\boxed{(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)}$

Cas des nombres complexes quelconques :

On les écrira sous la forme :
$z = a + jb = |z|.(\cos\theta + j\sin\theta)$ ou encore : $z = |z|.\exp(j\mathrm{Arg}(z)) = r.\exp(j\theta)$

La notation exponentielle des nombres complexes sera très utilement employée dans de nombreux domaines de la physique. Nous aurons l'occasion de nous y exercer et d'en voir l'intérêt dans les cours de mécanique (oscillations forcées) et d'électrocinétique.

4. Propriétés :

L'**égalité** entre deux nombres complexes : z = z' se traduira par l'égalité
- de leur parties réelles : a = a'
- et de leurs parties imaginaires b = b'.
-

La **somme** de deux nombre complexes z et z' vaut : $z + z' = (a + a') + j(b + b')$
La partie réelle de la somme de deux complexes est la somme de leurs parties réelles.
La partie imaginaire de la somme de deux complexes est la somme de leurs parties imaginaires.

Leur **produit** s'obtient par : $z.z' = (aa' - bb') + j(ab' + a'b)$
Il n'y a pas d'expression simple de la partie réelle et de la partie imaginaire du produit de deux complexes.

On nomme **nombre complexe conjugué** la quantité notée z* (ou $\bar{z}$) telle que : $z^* = a - jb$

On rappelle les propriétés :

$(z^*)^* = z$; $(z)^*.(z')^* = (z.z')^*$; $1/(z^*) = (1/z)^*$; $(z^*)^n = (z^n)^*$; $z^* + z'^* = (z + z')^*$.

Le **module** du nombre complexe $z = a + j.b$ défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
est calculable par : $|z|^2 = |z^*|^2 = z.z^*$

Propriétés sur les modules :

$|z^*| = |z|$; $|z^n| = |z|^n$; $|z|^2 = |z|^2 = z.z^*$; $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$; $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

Enfin, une des propriétés qui sera le plus employée en physique :

$$\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}}$$

Propriétés sur l'argument :

l'ensemble des propriétés récapitulées ci-dessous est très utilisé en électrocinétique :

$$\boxed{Arg\left(\frac{z}{z'}\right) = Arg(z) - Arg(z')}$$

$Arg(z.z') = Arg(z) + Arg(z')$; $Arg(1/z) = -Ag(z)$; $Arg(z^n) = n\, Arg(z)$.

5. ***Recommandation importante :***

Il est à noter que la pratique consistant à multiplier à priori une expression fractionnaire complexe par la sacro-sainte "quantité conjuguée" (c'est à dire par la valeur conjuguée du dénominateur), aura des conséquences **particulièrement néfastes** dans les calculs rencontrés en sciences physiques. Il faut se hâter d'oublier cette mauvaise attitude !

Pour déterminer le module ou l'argument d'un nombre complexe de forme : $\frac{a+jb}{a'+jb'}$; on **ne multiplie surtout pas** par la quantité conjuguée a' - jb'.

Le calcul du module se fait selon : $\left|\frac{a+jb}{a'+jb'}\right| = \frac{|a+jb|}{|a'+jb'|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$

celui de l'argument par : $Arg\left(\frac{a+jb}{a'+jb'}\right) = Arg(a+jb) - Arg(a'+jb')$;

La multiplication par la « quantité conjuguée » n'est utile (et nécessaire) <u>que</u> dans le cas où l'on recherche la partie réelle ou la partie imaginaire de l'expression.

Pour s'exercer :

Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants (on note $j^2 = -1$).
$Z_1 = 1/(1+j)$; $Z_2 = (1-j)^2$; $Z_3 = \frac{1-j}{1+j}$

Quelle est la partie réelle de $Z_4 = \frac{j}{1+j}$? Que vaut son module ? sa partie imaginaire ? son argument ?

$Z_5 = a + j.b + \frac{j}{1-j}$: pour quelles valeurs de a et de b le nombre Z_5 est-il réel ? imaginaire ?

Réponses : $|Z_1| = 1/\sqrt{2}$; $\arg(Z_1) = -\pi/4$; $|Z_2| = 2$; $\arg(Z_2) = -\pi/2$; $|Z_3| = 1$; $\arg(Z_3) = -\pi/2$
$Re(Z) = 1/2$; $|Z_4| = 1/\sqrt{2}$; $Im(Z_4) = 1/2$; $\arg(Z_4) = +\pi/4$;
Z_5 est réel pour $b = -1/2$; il est imaginaire pour $a = 1/2$.