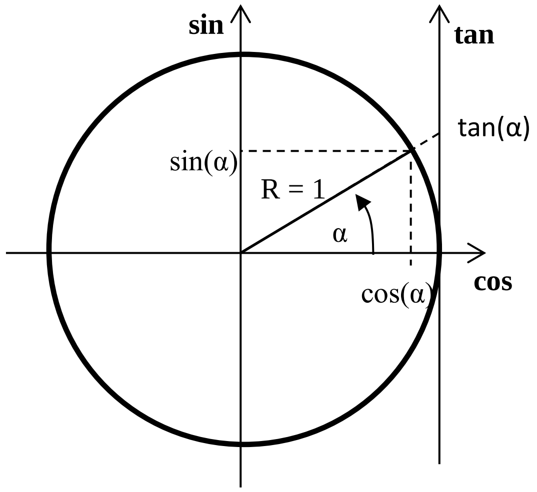
Trigonométrie

Une majorité des propriétés exposées dans ce document peuvent se visualiser en employant le cercle trigonométrique. La liste fournie n'est pas exhaustive, mais reprend les résultats es plus fréquemment utilisés.



D'après le théorème de Pythagore : $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$

Quelques valeurs particulières :

$\cos(0) = 1$; $\sin(0) = 0$

$\cos(\pi) = -1$; $\sin(\pi) = 0$

$\cos(\pi/2) = 0$; $\sin(\pi/2) = 1$

$\cos(-\pi/2) = 0$; $\sin(-\pi/2) = -1$

$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$; $\sin(\pi/6) = 1/2$

$\cos(\pi/3) = 1/2$; $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$

$\cos(\pi/2) = \sqrt{2}/2$; $\sin(\pi/2) = \sqrt{2}/2$

Relations entre angles :

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$; $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$; $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$

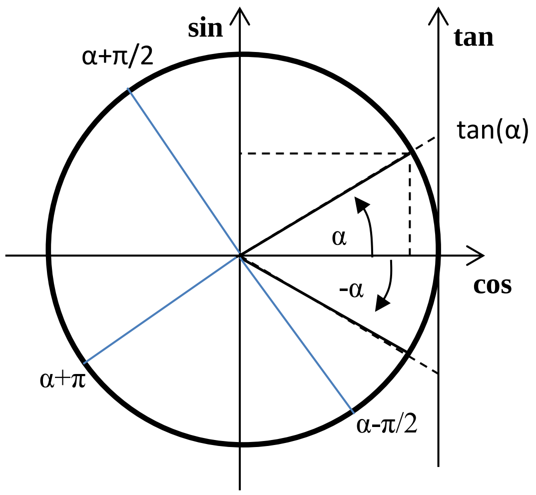
$\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$; $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha - \pi/2) = \sin(\alpha)$; $\sin(\alpha - \pi/2) = -\cos(\alpha)$

$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$; $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

$\tan(\alpha - \pi/2) = -1/\tan(\alpha) = -\operatorname{cotan}(\alpha)$;

$\tan(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{cotant}(\alpha)$; $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$



Cosinus d'une somme :

$\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$ et donc $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

Cosinus d'une différence :

$\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$ et donc pour $a = b$: $\cos(0) = 1$

Sinus d'une somme :

$\sin(a + b) = \sin(a).\cos(b) + \sin(b).\cos(a)$ et donc $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha).\cos(\alpha)$

Sinus d'une différence :

$\sin(a - b) = \sin(a).\cos(b) - \sin(b).\cos(a)$ et donc pour $a = b$: $\sin(0) = 0$

Cosinus de l'angle double :

$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2.\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2.\sin^2(\alpha)$

et donc : $\cos^2(\alpha) = (1 + \cos(2\alpha))/2$ (formulation très employée en physique).

Réécriture d'un produit de cosinus en une somme :

d'après : $\cos(a + b) = \cos(a).\cos(b) - \sin(a).\sin(b)$ et $\cos(a - b) = \cos(a).\cos(b) + \sin(a).\sin(b)$

$2.\cos(a).\cos(b) = \cos(a + b) + \cos(a - b)$

Réécriture d'une somme de cosinus en un produit :

$$\boldsymbol{cos(p) + cos(q) = 2.cos\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

formule à mémoriser, qui permet de retrouver, pour les afficionados...

$$\boldsymbol{sin(p) + sin(q) = 2.sin\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

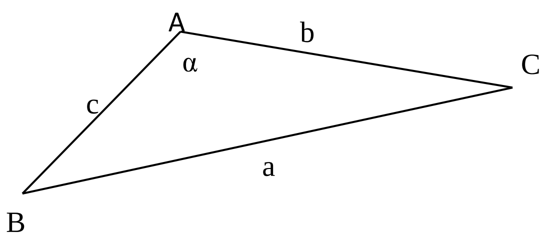
$$\boldsymbol{sin(p) - sin(q) = 2.cos\left(\frac{p+q}{2}\right).sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos(p) + cos(q) = 2.cos\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{cos(p) - cos(q) = -2.sin\left(\frac{p+q}{2}\right).sin\left(\frac{p-q}{2}\right)}$$

Théorème d'Al Kashi (ou de Pythagore généralisé).

Se démontre aisément en écrivant le carré scalaire sur une addition vectorielle.



$$\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 + 2bc.cos(\pi - \alpha)$$

Soit finalement :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\alpha)$$

On retrouve le cas particulier du théorème de Pythagore pour $\alpha = \pi/2$.