

Mesures et incertitudes

Table des matières

Introduction	
1 Variabilité et incertitude-type	3
1.1 La variabilité en science expérimentale.....	3
1.2 L'incertitude-type.....	3
1.3 Interprétation de l'incertitude-type.....	4
1.4 Comparaison de deux mesures.....	4
2 Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type	6
2.1 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B).....	6
2.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A).....	7
3 Les incertitudes-type composées	8
3.1 Incertitude-type composées de type somme	8
3.2 Incertitudes-type composées de type produit.....	8
3.3 Incertitudes-type composées quelconques.....	8
4 La régression linéaire	9
4.1 Principe	9
4.2 Quand utiliser une régression linéaire?.....	9
4.3 Application par méthode Monte-Carlo	10
5 Annexe 0 : écart-type pour une loi de probabilité uniforme.	11
6 Annexe 1 : Méthode Monte-Carlo pour estimer des incertitudes-types	11
6.1 Incertitude-type composée.....	11
6.2 Régression linéaire.....	11
7 Annexe 2 : Exercices corrigés	12
7.1 Mesures de la vitesse du son à l'aide d'ultrasons.....	12
7.2 Détermination de la valeur d'une capacité.....	13
7.3 Corrigés.....	14

Conformément au programme de CPGE, dans la poursuite de ceux du lycée, les notions présentées se veulent conformes aux règles internationales, définies par le *Bureau International des Poids et Mesure* dans le document fondamental *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (souvent cité en tant que « GUM »).

Le présent document servira de référence pour l'ensemble de l'année.

Les notions présentées ont vocation à être appliquées à l'occasion des travaux pratiques. Elles seront ainsi progressivement assimilées.

Des fichiers informatiques seront régulièrement proposés pour réaliser les démarches déterminant les incertitudes expérimentales.

Une version complète de ce photocopié, incluant les exercices et leur correction est disponible dans le dossier [Mesures et Incertitudes accessible sur le drive de physique](#).

Ce photocopié a été réalisé à partir d'un document produit par Maxime CHAMPION, professeur en CPGE et membre du Groupe de Travail ayant conçu le programme de physique de Sup PCSI.

Mesures et Incertitudes

Introduction

Une mesure, quelle qu'elle soit, ne peut être infiniment précise. On commet obligatoirement une erreur quand on relève une valeur numérique lors d'une mesure. Ces erreurs peuvent être dues à l'instrument de mesure lui-même, à la lecture de la mesure par l'opérateur, à la démarche expérimentale suivie etc. Par définition, ces erreurs resteront inconnues. Il importe de déterminer une quantité majorant cette erreur, de façon certaine ou du moins très probable, afin d'établir un intervalle de confiance encadrant la valeur relevée lors de la mesure. Cet intervalle, nommé intervalle d'incertitude, devra contenir très probablement la valeur exacte de la grandeur mesurée.

On distingue **deux types d'erreurs** :

• L'erreur de mesure aléatoire

Lorsqu'un même opérateur répète une mesure plusieurs fois, dans les mêmes conditions, les valeurs mesurées peuvent être différentes : on observe alors une variabilité de la mesure. Celle-ci est alors reliée à des **erreurs de mesure aléatoire**.

exemples :

- erreurs de manipulation (par exemple : réflexe limité de l'expérimentateur pour un chronométrage)
- erreurs de lecture : par exemple erreur de parallaxe (s'il n'a pas un caractère systématique)
- erreurs due à la précision finie des appareils. La méthode de calcul de l'incertitude d'un appareil est en principe fournie par le constructeur.

Cette dispersion des valeurs mesurées est due à la qualité de la mesure réalisée par l'opérateur et/ou à la qualité de l'instrument de mesure. Si on effectue, dans les mêmes conditions, un nombre infini de mesurages, le meilleur estimateur de la valeur mesurée est la moyenne de toutes les valeurs mesurées, notée \bar{m} .

• L'erreur de mesure systématique

Un appareil défectueux, mal étalonné ou utilisé incorrectement peut conduire à des valeurs mesurées proches les unes des autres, mais éloignées de la valeur « vraie ». On parle alors d'**erreur de mesure systématique**. Dans un contexte où il existe une valeur de référence (valeur référencée dans des tables numériques, valeur mesurée par un autre procédé...), la détection de cet écart systématique amène à revoir le mode opératoire de la mesure, qui peut être corrigé.

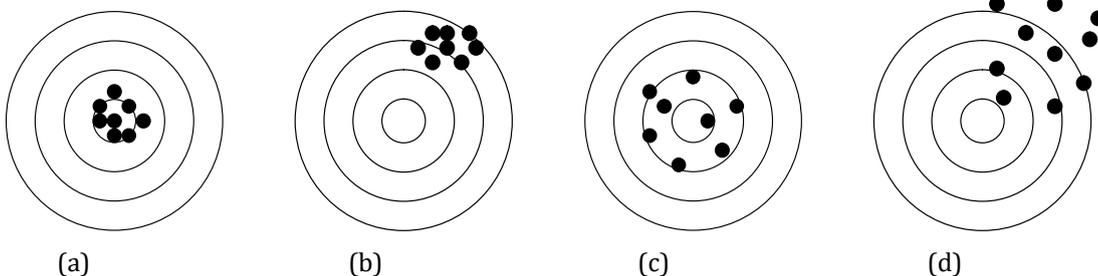
exemples :

- instrument présentant un défaut : mauvais étalonnage, dérive...
- mauvais emploi de l'instrument : mauvais tarage d'une balance. Une balance numérique peut afficher 0,50 g alors que le plateau est vide ; toutes les mesures de masses seront alors surestimées de 0,50 g
- méthode de mesure mal adaptée au problème...

Les erreurs systématiques résultent d'une même cause, dans un contexte donné, perturbant de la même façon, dans le même sens, l'ensemble des mesures. Présentant un aspect systématique, ces erreurs peuvent parfois être détectées, et même corrigées. Dans ce cas la mesure est alors dite **juste**.

Les erreurs aléatoires (accidentelles, erratiques) sont toutes les erreurs que l'on ne peut contrôler dans une expérience donnée. Ainsi quand on réitère plusieurs fois la même mesure, on obtient une série de résultats différents, présentant une **variabilité**. Ils sont très proches si la mesure est **fidèle**.

Pour mieux suggérer la distinction entre erreurs systématiques et aléatoires, faisons une analogie avec le tir à la cible. Le cœur de la cible définit la valeur attendue de la grandeur physique, assortie d'une certaine incertitude (valeur prévue par la théorie, ou valeur de référence répertoriée dans des tables...). Chaque impact représente une mesure.



(a) erreurs systématiques et aléatoires faibles : mesure juste et fidèle.

(b) erreurs aléatoires faible, mais grandes erreurs systématiques : mesure fidèle mais pas juste (on peut corriger le tir)

(c) erreurs aléatoires grandes, avec peu ou pas d'erreur systématique : mesure juste, mais non fidèle.

(d) incertitudes systématiques et aléatoires fortes : mesure ni juste ni fidèle.

L'incertitude de mesure caractérise la dispersion des valeurs résultant de l'expérience. **L'incertitude de mesure est notée U** . La notation U vient de l'anglais « *uncertainty* ».

On notera en minuscule $u(x)$ l'incertitude-type caractérisant la variabilité d'une mesure d'une grandeur x .

1 Variabilité et incertitude-type

1.1 La variabilité en science expérimentale

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Si cette variabilité peut être parfois imputée pour une large part aux maladroesses de l'expérimentateur, elle peut aussi apporter de précieuses informations sur le processus physique mis en jeu dans la mesure !

Cette variabilité peut provenir de nombreux facteurs, dont les principaux sont les suivants :

- . la précision des instruments de mesure, le choix de la méthode de mesure ;

Exemple 1 : Choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision !

- . les variations de l'environnement ;

Exemple 2 : Si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.

- . la variabilité propre aux instruments de mesure ;

Exemple 3 : Mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente.

- . le processus physique lui-même ;

Exemple 4 : Par exemple, une expérience de mécanique quantique est intrinsèquement variable car la mécanique quantique ne prédit que des lois de probabilité.

- . la dextérité et l'attention prêtée par la personne réalisant l'expérience !

Généralement, au niveau scolaire, la personne réalisant l'expérience est la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

En acquérant une plus grande rigueur expérimentale, en faisant preuve d'attention et de bon sens, on va diminuer son impact personnel sur la variabilité d'une mesure.

1.2 L'incertitude-type

Définition. La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée $u(x)$.

Par définition, l'incertitude-type correspond à l'**écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Dans ce document, le résultat d'une mesure sera noté **par convention** : $x \pm u(x)$.

Attention : Le signe \pm placé entre x et $u(x)$ peut prêter à confusion ; $u(x)$ n'est pas une "incertitude élargie" déterminant un intervalle $[x - u(x) ; x + u(x)]$ sur lequel on peut accorder un niveau de confiance donnée.

Pour éviter cela, on peut spécifier les deux informations de façon séparée, à savoir $x = \dots$ d'une part et $u(x) = \dots$ d'autre part.

Avoir une incertitude-type $u(x)$ signifie que l'on peut s'attendre, statistiquement, à une variabilité des résultats de l'ordre de quelques $u(x)$ autour de la valeur moyenne des mesures.

On fera à ce stade deux remarques :

- . pour estimer l'incertitude-type du résultat d'une **unique** mesure, il faut donc répéter un grand nombre de fois le processus de mesure. Cette répétition et les valeurs supplémentaires servent uniquement à estimer la variabilité du processus de mesure.
- . l'incertitude-type est l'estimation d'une variabilité qui est unique à chaque processus de mesure. Il est donc naturel que deux personnes réalisant exactement la même expérience aient une variabilité, et donc une incertitude-type, différente.

Propriété. La variabilité d'un processus de mesure avec un protocole, du matériel et des conditions expérimentales données, impliquant une ou plusieurs personnes dans l'expérience, est mesurée par une unique incertitude-type.

Incertitude-type « absolue » : L'incertitude-type $u(x)$, en tant qu'écart-type de la distribution des mesures qui seraient répétées un très grand nombre de fois, va s'exprimer dans la même unité que la mesure à laquelle elle est reliée.

Incertitude-type « relative » : On peut définir de plus l'incertitude-type de mesure « relative » la grandeur $u(x)/x$, adimensionnée, que l'on donne généralement en pourcentage.

1.3 Interprétation de l'incertitude-type

Revenons à la définition de l'incertitude-type. Soit un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N .

On définit la **moyenne** \bar{x} de l'ensemble, qui nous permet de définir l'écart-type, et donc l'incertitude-type, grâce aux relations :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{et} \quad u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

Il est à noter qu'il n'y a qu'une incertitude-type $u(x)$ pour l'ensemble des mesures x_i , et non pas une pour chacune. En effet, l'incertitude-type caractérise la variabilité d'un processus de mesure, et donc toutes les mesures issues de ce processus ont logiquement la même incertitude-type.

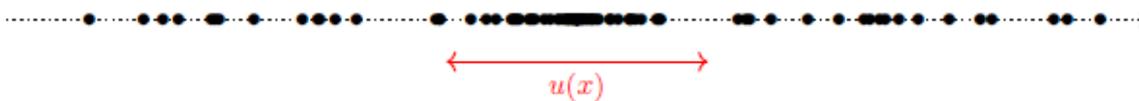


Fig. 1 – Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

La figure 1 représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$. Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents car peu probables mais tout de même possibles.

Propriété. L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'une mesure. Ainsi, deux mesures x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques $u(x)$ par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type.

1.4 Comparaison de deux mesures

1.4.1 Définition de l'écart normalisé (ou z-score).

Définition. Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

Cette quantité, notée E_N vise à évaluer la performance d'un mesurage.

E_N est le rapport de la valeur absolue de l'écart entre la valeur mesurée m_1 et la valeur mesurée m_2 , à la racine de la somme des incertitudes aux carrées de chacune des valeurs $u(m_1)$ et $u(m_2)$.

$$E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}} = \frac{\sqrt{(m_1 - m_2)^2}}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}$$

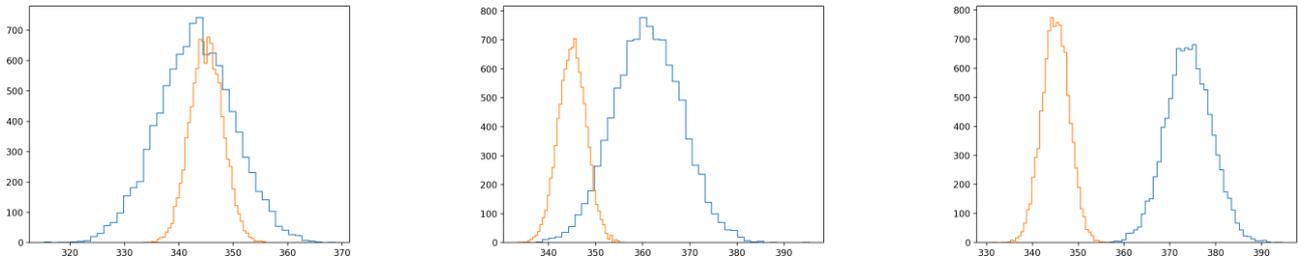
La valeur de référence est la valeur de la grandeur m telle qu'elle est attendue (valeur tabulée, résultat théorique...).

Par convention, on qualifie usuellement deux résultats de **compatibles** si leur écart normalisé, ou z-score, est inférieur ou égal à 2. Ceci renvoie alors à un niveau de confiance de 95% sur cette compatibilité.

Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc.

Ce seuil peut différer selon le domaine et le niveau d'exigence qui lui est attaché : par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, il faut atteindre un seuil de 5.

On constate avec les trois histogrammes 2a, 2b et 2c que les distributions se chevauchent si E_N est suffisamment petit. Si elles se chevauchent, cela veut dire qu'il est possible que les deux processus de mesure conduisent au même résultat.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$. (b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$. (c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

Fig. 2 – Tracé de deux distributions de résultats de mesures.

1.4.2 Interprétation

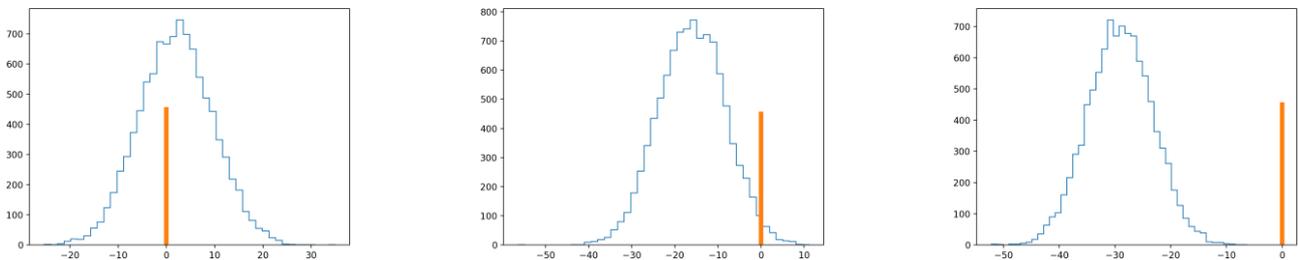
Pour justifier cette convention, on peut revenir à la définition de l’incertitude-type. Celle-ci quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsque deux mesures sont cohérentes, on s’attend à ce qu’elles ne coïncident pas exactement, mais qu’elles ne s’écartent pas l’une de l’autre de plus que de quelques incertitudes-type.

Pour respecter cette définition, prenons deux valeurs expérimentales que l’on souhaite comparer m_1 et m_2 , d’incertitudes-type $u(m_1)$ et $u(m_2)$. Si m_1 et m_2 peuvent être considérées comme compatibles, cela implique que la valeur 0 n’est éloignée de $m_1 - m_2$ que de quelques incertitudes-types $u(m_1 - m_2)$.

On admet pour l’instant que $u^2(m_1 - m_2) = u(m_1)^2 + u(m_2)^2$ (ce résultat est discuté dans la partie 3.1).

Le rapport E_N compare le nombre d’incertitudes-types séparant 0 de la différence $m_1 - m_2$. Si ce nombre est trop grand, alors la valeur 0 n’est pas compatible avec la valeur de la différence $m_1 - m_2$ et donc les valeurs mesurées m_1 et m_2 ne sont pas compatibles.

Dans les trois figures 3a, 3b et 3c, la barre verticale représente la valeur 0. On constate bien que, si E_N est trop grand, alors cela implique que la valeur 0 est séparée de tous les points de mesure d’un trop grand nombre de fois l’incertitude-type.



(a) Simulation d’un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec les distributions de la figure 2a. (b) Simulation d’un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec les distributions de la figure 2b. (c) Simulation d’un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec avec les distributions de la figure 2c.

Fig. 3 – Simulation d’un calcul de $m_1 - m_2$ point par point.

1.4.3 Ecart normalisé et comparaison d’une mesure à une valeur de référence.

On se place ici dans le contexte fréquent, où l’on procède à la mesure d’une grandeur physique par un processus donné, dont on souhaite tester la validité par référence à une valeur a priori acceptable. La valeur de référence est la valeur de la grandeur X telle qu’elle est attendue (valeur tabulée résultant de mesures conduites par l’ensemble de la communauté scientifique, résultat théorique...).

L’écart normalisé E_N est défini en fonction des incertitudes-types $u(X)$ et $u_{réf}(X)$ ce qui conduit, pour un coefficient d’élargissement de 2, correspondant à un niveau de confiance de 95% à adapter le critère :

$$E_N = \frac{|X - X_{réf}|}{\sqrt{u(X)^2 + u(X_{réf})^2}} = \frac{\sqrt{(X - X_{réf})^2}}{\sqrt{u(X)^2 + u(X_{réf})^2}}$$

- $|E_N| < 2$: Aptitude satisfaisante
- $|E_N| > 2$: Aptitude non satisfaisante

Si la valeur de référence est mal définie et que son incertitude est grande au regard des participants, elle ne permet évidemment pas d'être utilisée pour évaluer l'aptitude.

Dans le cas où l'incertitude absolue sur la valeur de référence est suffisamment faible, le terme $u(X_{\text{réf}})^2$ sera négligeable devant le terme $u(X)^2$ et l'écart normalisé devient simplement :

$$E_N = \frac{|X - X_{\text{réf}}|}{u(X)}$$

Ce qui signifie que les considérations d'aptitude de la mesure se traduisent alors de façon évidente par :

$$\begin{aligned} |X - X_{\text{réf}}| < U(X) = 2 u(X) &: \text{Aptitude satisfaisante} \\ |X - X_{\text{réf}}| > U(X) = 2 u(X) &: \text{Aptitude non satisfaisante} \end{aligned}$$

La confrontation de la mesure X à la valeur de référence peut être l'occasion de détecter l'existence d'une erreur systématique dans le processus de mesure. De même, la confrontation de la mesure d'une même grandeur X par des processus de mesure différents peut révéler une erreur systématique en cas de non compatibilité des résultats.

Les instruments de mesure (en particulier ceux employés pour les mesures électriques comme les multimètres, les oscilloscopes, ...) devraient subir régulièrement des opérations de maintenance visant à réétalonner ces instruments, ce qui en pratique n'est guère réalisable dans un lycée.

2 Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type

2.1 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. Cela signifie qu'en reproduisant la mesure, on retrouve systématiquement le même résultat. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée. Logiquement, reproduire la mesure n'apporte pas d'information.

Cette absence de variabilité observée n'implique pas une absence de variabilité. Cela signifie juste qu'à l'échelle de cette expérience, avec l'appareil de mesure choisi, la variabilité est plus faible que la précision de la mesure.

Ce phénomène n'est pas uniquement lié à l'appareil de mesure. En effet, selon les conditions expérimentales, il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure. Dans ce cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type.

Il faut donc estimer théoriquement la variabilité de la mesure sans l'observer.

Nécessairement, cela est possible sous certaines hypothèses qui ne seront pas forcément adaptées à toutes les expériences.

Propriété. Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée.

On note \bar{x} la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Dans ce cas, le résultat de la mesure est $\bar{x} \pm u(\bar{x})$ avec $u(x) = \Delta/\sqrt{3}$

Cette formule sera discutée en détail dans la partie méthode de ce chapitre. La relation $u(x) = \Delta/\sqrt{3}$ est établie dans l'annexe . Comme toute incertitude-type, elle représente l'écart-type de la distribution uniforme des données comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Insistons sur deux remarques :

. L'intervalle Δ doit être pris le plus faible possible selon les critères personnels de l'expérimentateur et selon les conditions de l'expérience. Il ne doit pas y avoir de règle générale.

Par exemple avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $\Delta = 0,25$ mm, tandis que si la valeur est entre deux graduations, on prendra plus logiquement $\Delta = 0,5$ mm. Et enfin, un étudiant peu sûr de lui (ou myope...) peut choisir de prendre dans le même cas $\Delta = 1$ mm.

Usuellement, pour un instrument fournissant une valeur avec une précision p , on considèrera $\Delta = p/2$ et l'on aura donc une incertitude type $\Delta/\sqrt{3}$.

. Pour les appareils de mesure numérique, il est nécessaire de consulter la notice de l'appareil. Toutefois, bien souvent, les notices ne précisent pas clairement la nature de la valeur de la précision fournie (est-ce une incertitude-type ? un intervalle ? un écart-type d'une distribution gaussienne ?). Dans ce cas, on suppose que l'incertitude affichée sur la notice est un intervalle Δ de certitude de trouver la mesure.

Exemple : Prenons une expérience de mesure de distance focale d'une lentille mince convergente. Un étudiant réalise vingt mesures de positions d'objet et d'image puis, en appliquant la relation de conjugaison, il en déduit vingt valeurs de la distance focale. En réalisant un traitement statistique, il mesure l'écart-type de la distribution de ces distances focales $u(f') = 0,15$ cm.

Ensuite, cet étudiant consciencieux estime la précision de la mesure de la position de l'objet à 1 cm et la précision de la position de l'image à 3 cm car il lui semble que l'image reste nette sur une plage assez large. À l'aide d'une simulation Monte-Carlo, il en déduit que l'incertitude de type B vaut $u(f') = 0,32$ cm.

Ainsi, en estimant la précision sur les positions, l'étudiant estime une variabilité qui est le double de la variabilité observée. L'étudiant estime donc une variabilité qui n'est pas observée. Les incertitudes sur les mesures des positions sont donc surestimées.

Qui plus est, en conduisant le calcul d'incertitude de type A décrite au paragraphe suivant, l'incertitude finale sur la moyenne est donnée par $u(\bar{f}') = u(f')/\sqrt{20} = 0,033$ cm.

Le calcul d'incertitude de type B a donc donné une incertitude largement surestimée et son estimation a pris un temps certain à l'étudiant...

2.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus mesure pour estimer l'incertitude-type sur une unique réalisation de la mesure.

Toutefois, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3, certains points de mesure ont statistiquement une chance d'être très éloignés des autres.

Pour gagner en précision, nous pouvons utiliser les différents points de mesures effectués pour aller plus loin qu'une simple estimation de l'incertitude-type sur une mesure unique.

Nous **changeons donc d'expérience**, l'expérience n'est plus « mesurer un point à l'aide d'un protocole » mais « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ». Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'intérêt de la moyenne est qu'elle va réduire les variabilités.

Pour estimer l'incertitude-type de cette moyenne, il faut par définition reproduire un grand nombre de fois l'expérience et calculer l'écart-type de la distribution obtenue. Or chaque expérience est déjà la reproduction de la mesure unique un grand nombre de fois, on comprend bien que cette opération peut vite être chronophage. Heureusement, il existe une formule mathématique permettant d'estimer cet écart-type.

Propriété. On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note $u(\bar{x})$ l'incertitude-type de cet ensemble de mesures, correspondant à son écart-type statistique.

Le résultat de l'expérience est $x = \bar{x} \pm u(\bar{x})$

$$\text{avec : } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{et} \quad u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$$

Ainsi, en une série de N mesures, on obtient les points expérimentaux, leur incertitude-type, la moyenne de ces points et grâce à cette formule, l'incertitude-type sur la moyenne.

On obtient ainsi une estimation plus précise de la grandeur à mesurer en modérant la variabilité de chaque prise de mesure unique. On constate d'après cette formule que **l'incertitude-type diminue avec la racine carrée du nombre N de mesures effectuées**, ce qui montre l'intérêt de réitérer un processus de mesure.

Nous aurons l'occasion d'appliquer cette démarche par la mise en commun de résultats de mesures effectuées selon le même mode opératoire, sur l'ensemble du groupe de TP.

3 Les incertitudes-type composées

Très souvent la grandeur mesurée Y n'est pas atteinte directement, mais par le biais d'autres grandeurs : $y = f(x_1, x_2, \dots)$ où les grandeurs x_1, x_2, \dots sont directement mesurables et f est une fonction mathématique reliant Y à ces grandeurs.

Il faut souvent combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité.

Deux types d'expression classiques vont conduire à une formulation de l'incertitude type qu'il faudra mémoriser.

3.1 Incertitudes-types composées de type somme, différence ou somme pondérée

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$.

L'incertitude-type de y est alors donnée par :
$$u(y) = \sqrt{(\alpha \cdot u(x_1))^2 + (\beta \cdot u(x_2))^2}$$

L'incertitude-type sur y est la somme quadratique (pondérée) des incertitudes-types sur x_1 et x_2 .

Ainsi pour $y = x_1 - x_2$ par exemple, on obtient immédiatement ($\alpha = 1$ et $\beta = -1$) :

$$u(y) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$$

3.2 Incertitudes-types composées de type produit ou rapport

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = a \cdot x_1^\alpha \times x_2^\beta$.

L'incertitude-type relative de y est alors donnée par :
$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \cdot \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \cdot \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

L'incertitude-type relative sur y est la somme quadratique (pondérée par les exposants) des incertitudes-types relatives sur x_1 et x_2 .

Ainsi pour $y = k \cdot x_1 / x_2$ par exemple, on obtient immédiatement ($\alpha = 1$ et $\beta = -1$; k quelconque) :

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

3.3 Incertitudes-types composées quelconques

Seules les deux formules précédentes sont à connaître, pour tous les autres cas, nous allons revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique comportant une part d'aléatoire, calculer l'incertitude-type. Des exemples seront proposés dans différentes occasions, durant les travaux pratiques.

Définition. Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait partie des **algorithmes de type Monte-Carlo**.

Remarque : Les algorithmes de Monte-Carlo sont nombreux et ont de nombreuses applications.

Leur point commun est qu'ils sont basés sur un **processus aléatoire** (random) simulé informatiquement. Voir exemples d'application proposés plus loin et sur des fichiers python associés.

4 La régression linéaire

4.1 Principe

Définition. Prenons des listes de mesures x et y avec leurs incertitudes. La **régression linéaire** est une opération mathématique qui consiste à trouver les meilleurs coefficients a et b tels que $a \cdot x_i + b$ soient les plus proches en moyenne des points de mesures y_i .

Remarque : En toute rigueur, il faudrait parler de régression affine et non pas linéaire, puisqu'elle renvoie à la détermination des coefficients affectés à une droite affine d'ordonnée à l'origine b . La linéarité réside sur le fait que les variations de y seront proportionnelles aux variations de x .

Une régression linéaire permet de trouver la « meilleure droite » modélisant le mieux le comportement de ces points. Mathématiquement, on peut optimiser par un calcul dit « des moindres carrés » ce procédé.

Attention : Le coefficient r^2 n'a aucun intérêt pour valider un modèle physique ou pour estimer des incertitudes-type. Pour vous convaincre que le coefficient r^2 ne permet en rien de juger une régression linéaire, on peut regarderla vidéo suivante (dans laquelle le coefficient « cor » correspond au r) :

https://youtu.be/It4UA75z_KQ

4.2 Quand utiliser une régression linéaire ?

Supposons que l'on cherche à vérifier un modèle $y = ax + b$ et que l'on ait, après expérience, un ensemble de couples de valeurs expérimentales $\{x_i ; y_i\}$ qui possèdent chacune une certaine variabilité.

La régression linéaire simple permet, à partir de l'ensemble des points expérimentaux, de trouver une valeur de a et une valeur de b . Pour estimer l'incertitude-type de ces paramètres, il faudrait réaliser des ensembles de nouvelles mesures $\{x_i ; y_i\}$ et procéder à une nouvelle régression linéaire. En réalisant un grand nombre de fois cette opération, on obtiendra alors, en prenant les écarts-types, les valeurs des incertitudes-types sur les paramètres. Bien souvent, un tel procédé est bien trop long pour être mis en pratique.

- . En première intention, on pourra apprécier graphiquement l'adéquation de la régression linéaire avec les points expérimentaux en vérifiant que la droite de régression passe par les plages déterminées par les incertitudes-types sur x et y , centrées autour de chacun des points de mesure $\{x_i ; y_i\}$.

- . Lors d'une expérience identique réalisée par plusieurs expérimentateurs conduisant à une régression linéaire par chacun des expérimentateurs, l'incertitude-type finale est uniquement évaluée par l'étude de la variabilité des résultats de la régression linéaire. Il n'est pas nécessaire d'étudier plus en détail la régression linéaire. Dans ce cas, la régression linéaire est une des étapes du protocole de mesure, et sa variabilité est intégrée lors du calcul de variabilité final.

- . Si le modèle recherché implique $b = 0$, dans ce cas, on cherche uniquement à estimer a . On peut donc calculer un grand nombre de valeur de a par la relation y_i/x_i puis réaliser un traitement statistique sur ces valeurs. Le grand intérêt est que, dans ce cas, les N points de mesures conduisent à N valeurs de a ayant une variabilité claire. Dans le cas de la régression linéaire, ces N valeurs conduisent à une unique valeur de a dont on ne peut pas directement étudier la variabilité.

Dans tous les autres cas, on peut estimer la variabilité de a et b par une simulation Monte-Carlo.

Remarque : Dans ce second cas, si le calcul de l'écart normalisé final entre la mesure de a et la valeur attendue a a une valeur plus grande que 2, c'est que le modèle linéaire n'est peut-être pas optimal et qu'un modèle avec un b non nul serait préférable.

4.3 Application par méthode Monte-Carlo

On commence par réaliser une régression linéaire sans incertitudes sur les valeurs mesurées. La pente et l'ordonnée à l'origine obtenues sont le résultat numérique de la mesure.

Pour estimer leurs incertitudes-type, il faut de plus estimer **pour chaque point de mesure** la valeur de son incertitude-type. Ensuite, à l'aide d'une simulation Monte-Carlo, on utilise cette variabilité individuelle pour générer un grand nombre de distributions de points. Pour chacune de ces distributions, on réalise une régression linéaire ce qui conduira au final à un grand nombre de valeurs de a et de b . Il suffit ensuite de réaliser une étude statistique de ces données pour en déduire leur incertitude-type.

Pour s'assurer qu'une régression linéaire est correcte, on tracera **systématiquement** sur un graphique les données mesurées ainsi que la droite de la régression linéaire. Le modèle sera validé si, à l'œil, les points de mesure sont bien alignés et que la droite passe le plus proche de tous les points possibles, en incluant leurs incertitudes-type.

Remarque : On rappelle que l'incertitude-type est une estimation de la variabilité de la mesure. Ainsi, il est naturel que les points expérimentaux soient éloignés de la valeur de la modélisation de quelques incertitudes-type. Si l'on constate graphiquement par exemple que les points s'organisent sur une courbe ressemblant plus à une parabole qu'à une droite, la régression linéaire ne sera pas l'outil approprié.

5 Annexe 0 : écart-type sur une loi de probabilité uniforme.

On suppose une loi de probabilité uniforme sur une variable x , distribuée sur l'intervalle $[x_0 - \Delta ; x_0 + \Delta]$.

La densité de probabilité a donc une valeur identique en tout point appartenant à cet intervalle : $p(x) = 1/2\Delta$ et $p(x) = 0$ hors de l'intervalle.

On peut vérifier la condition de normalisation :

$$\int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} p(x) dx = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx = 1$$

L'écart-type $u(x)$ sur la variable $u(x)$ est la moyenne quadratique des écarts à la valeur centrale x_0 . Ce qui amène la relation de définition :

$$u(x)^2 = \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} p(x)(x - x_0)^2 dx \quad \text{soit donc : } u(x)^2 = \frac{1}{2\Delta} \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} (x - x_0)^2 dx$$

$$\text{Il vient : } u(x)^2 = \frac{1}{2\Delta} \left[\frac{(x - x_0)^3}{3} \right]_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} = \frac{1}{2\Delta} 2 \frac{\Delta^3}{3}$$

Le calcul conduit finalement à un écart-type $u(x) = \Delta/\sqrt{3}$ pour une variable x , distribuée selon une loi de probabilité uniforme sur l'intervalle $[x_0 - \Delta ; x_0 + \Delta]$.

6 Annexe 1 : Méthode Monte-Carlo pour estimer des incertitudes-types

Les codes présentés dans cette partie sont réalisés sous python. Ce n'est absolument pas une obligation, les simulations peuvent être réalisées avec n'importe quel tableur pouvant réaliser un tirage de nombres aléatoires.

6.1 Incertitude-type composée

6.1.1 Principe

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, \dots)$ avec les x_i des données résultants d'une mesure et f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type.

La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer l'incertitude-type, il faut remonter à la variabilité de y , qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i .

Pour cela, il faut :

- . Fixer un nombre N de simulations à réaliser ;
- . Pour k entre 1 et N , réaliser
 - . un tirage aléatoire pour chaque x_i ;
 - . utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k ;
 - . sauvegarder cette valeur y_k ;
- . l'incertitude-type de y est l'écart-type $u(y)$ de la distribution des y_k . La moyenne des y_k permet de retrouver la valeur y .

Le choix de la distribution de probabilité de chaque x_i dépend de plusieurs facteurs expérimentaux. La modélisation de cette distribution peut être délicate. Par exemple, il n'est pas du tout naturel de prendre systématiquement une distribution gaussienne.

Sauf indication contraire, les x_i sont généralement mesurés avec une précision donnée, déterminée par l'instrument de mesure employé. On privilégie alors la **distribution uniforme de probabilité**, cohérente avec l'expérience pratique de l'étudiant.

En notant Δ la précision, l'incertitude-type qui caractérise la variabilité vaut : $u(x) = \Delta/\sqrt{3}$.

Toute autre forme de distribution doit pouvoir être justifiée et argumentée par l'étudiant. L'autre cas envisageable est la distribution gaussienne, pour laquelle la valeur relevée x_i est obtenue par une approche interactive amenant à une correction basée sur un ensemble de paramètres intuitifs permettant de centrer la valeur. L'exemple typique est celui de la mise au point d'une image sur un écran pour situer la position de l'image.

6.1.2 Exemples

À l'aide de python, on a simulé à l'aide d'une méthode Monte-Carlo les incertitudes composées de :

- . une fréquence connaissant la période ;
- . une longueur entre deux points connaissant leurs positions ;

- . une célérité connaissant une fréquence et une longueur d'onde ;
- . une célérité connaissant la période de l'onde et la position de deux nœuds séparant 10 longueurs d'ondes ;
- . une distance focale connaissant les positions de l'objet et de l'image.

Tous ces exemples sont regroupés dans un fichier « [exemples Monte_Carlo](#) » placé dans le dossier [Mesures et Incertitudes_python accessible sur le drive de physique](#).

6.2 Régression linéaire

6.2.1 Principe

En physique-chimie, nous n'avons jamais des séries parfaites de nombres, chaque mesure a une incertitude. Supposons que nous ayons réalisé m mesures de couples (x_i, y_i) , chacun avec une incertitude-type $(u(x_i), u(y_i))$. Ces incertitudes-types peuvent être différentes pour chaque mesure.

Pour en tenir compte, on réalise une simulation Monte-Carlo en réalisant un très grand nombre de régression linéaire sur une série de points sans incertitudes. Pour obtenir ces points, on génère aléatoirement pour chaque point mesuré une valeur à l'aide des incertitudes-type expérimentales.

Conformément aux préconisations normalisées, si nous n'avons pas d'information pour savoir de quelle façon générer les valeurs, on choisit une distribution de probabilité uniforme (cf. section précédente). Attention, on rappelle que pour une distribution uniforme situant x entre $x - \Delta$ et $x + \Delta$, on a la relation $\Delta = u(x) \times \sqrt{3}$.

Les valeurs finales de la pente et de l'ordonnée à l'origine sont les moyennes de toutes leurs valeurs, et leurs incertitudes-types sont les écarts-types de ces deux ensembles de valeurs.

- On note P le nombre de points de mesures. Pour la simulation Monte-Carlo, il faut réaliser l'algorithme ci-dessous :
- . réaliser une régression linéaire unique pour estimer la pente et l'ordonnée à l'origine ;
 - . fixer un nombre N très grand ;
 - . créer deux listes vides pour stocker les pentes et les ordonnées à l'origine des régressions ;
 - . pour chaque i compris entre 1 et N , réaliser
 - . pour chaque j compris entre 1 et P , réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de Y_j donnée par une loi de probabilité uniforme entre $y_j - \Delta \times \sqrt{3}$ et $y_j + \Delta \times \sqrt{3}$;
 - . pour chaque j compris entre 1 et P , réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de X_j donnée par une loi de probabilité uniforme entre $x_j - \Delta \times \sqrt{3}$ et $x_j + \Delta \times \sqrt{3}$;
 - . réaliser une régression linéaire sur cet ensemble (X_j, Y_j) puis ajouter dans les listes la pente et l'ordonnée à l'origine de cette régression.
 - . calculer pour les écarts-types des deux listes des pentes et des ordonnées à l'origine pour obtenir les incertitudes-types ;
 - . tracer sur un graphique la droite obtenue avec la pente moyenne et l'ordonnée à l'origine moyenne ;
 - . superposer sur le même graphique les points de mesures en indiquant leurs incertitudes-type sous la forme de barres d'erreur.

6.2.2 Exemple

Lorsqu'un métal est éclairé par un rayonnement ultraviolet ou proche ultraviolet, des électrons sont extraits du métal : c'est l'effet photoélectrique. On considère une plaque de baryum éclairée par une lampe spectrale au mercure. Un système de filtres permet de sélectionner une longueur d'onde particulière λ émise par la lampe. Un dispositif expérimental indépendant permet de mesurer l'énergie cinétique E_c des électrons extraits de la plaque de baryum.

On récapitule ci-dessous les valeurs mesurées. L'incertitude-type de l'énergie cinétique est de 0,05 eV.

NB : On adopte pour la suite la notation anglo-saxonne pour les valeurs décimales (. et non ,).

E_c (eV)	2.40	1.69	0.91	0.57	0.35
ν ($\times 10^{14}$ Hz)	11.825	10.111	8.210	7.4129	6.8838
$u(\nu)$ ($\times 10^{12}$ Hz)	2.3	1.7	1.1	0.91	0.79

L'énergie cinétique des électrons extraits d'un métal éclairé par une onde électromagnétique de fréquence ν s'écrit :

$$E_c = h(\nu - \nu_s) \quad (5.1) \quad \text{où } \nu_s \text{ est une constante appelée fréquence seuil.}$$

Le code python de la régression linéaire est disponible dans un fichier « [régression linéaire](#) » placé dans le dossier [Mesures et Incertitudes_python accessible sur le drive de physique](#).

Par régression linéaire, on obtient $h = (6.63 \pm 0.20) \times 10^{-34}$ J · s et $\nu_s = (6.03 \pm 0.32) \times 10^{14}$ Hz.

7 Annexe 2 : Exercices corrigés

Les calculs d'écart-types et de régression linéaire simples sont largement accessibles avec une calculatrice de type lycée ou avec l'application gratuite NumWorks™.

L'application de la méthode Monte-Carlo peut se faire avec un tableur ou avec python.

7.1 Mesure de la vitesse du son

On se propose de mesurer la fréquence et la célérité dans l'air des ultrasons produits en utilisant deux propriétés différentes du son. L'étude de la célérité de l'onde est importante, puisque sa connaissance permet de mesurer des distances (à partir de mesures de temps). Cette célérité dépend du milieu dans lequel se propage l'onde.

L'émetteur d'ultrasons est alimenté par une source de tension continue de 15 V. Il peut émettre soit un signal continu (signal sinusoïdal permanent), soit un signal en salves (signal intermittent). Un commutateur permet de sélectionner l'un ou l'autre de ces signaux.

Un récepteur ultrasonore transforme l'onde ultrasonore, à l'endroit où il est situé, en une tension électrique de même fréquence et d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde. Les récepteurs seront donc connectés aux entrées d'un oscilloscope afin de visualiser les signaux.

L'émetteur et les récepteurs seront placés sur un banc acoustique gradué permettant de relever leur position.

7.1.1 Mesure par temps de vol

Les deux récepteurs sont tous deux reliés à l'oscilloscope numérique ce qui permet de mesurer le temps de vol de la salve entre les deux récepteurs.

Variabilité de la mesure unique

1. Au cours d'une première mesure, un premier groupe d'élèves mesure un temps de vol de 0.59 ms pour des émetteurs séparés de 20 cm. En déduire la valeur calculée de la célérité du son.

Pour estimer son incertitude-type, la mesure a été reproduite 9 fois de plus.

d (en cm)	10	13	17	22	26	30	33	37	40
τ (en ms)	0.27	0.38	0.50	0.66	0.73	0.90	0.96	1.09	1.15

Tab. 1 – Mesures du temps de vol des ultrasons pour différentes distances entre récepteurs.

2. Tracer l'histogramme de distribution des 10 valeurs de vitesse.
3. Calculer l'incertitude-type du processus de mesure.

Variabilité de la valeur moyenne

4. Calculer la valeur moyenne de la célérité obtenue par le premier groupe d'élèves.

Pour estimer l'incertitude-type de cette mesure, les onze groupes d'élèves ont mis en commun leur mesure de moyenne effectuée sur 10 mesures individuelles.

Groupe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c_{moy} (en m/s)	343. 8	339. 2	343. 0	343. 9	340. 5	335. 8	344. 3	341. 0	346. 5	337. 9

Tab. 2 – Mesures de la vitesse du son moyenne sur 10 mesures pour 10 autres groupes d'élèves.

5. En déduire l'incertitude-type expérimentale sur la moyenne de la célérité.
6. Comparer cette valeur expérimentale au résultat de la formule théorique fournie dans le cours.

7.1.2 Mesure par l'aspect ondulatoire

L'émetteur fonctionne cette fois en mode continu. Les deux récepteurs sont tous deux reliés à l'oscilloscope numérique.

Mesure de la longueur d'onde

Un des récepteurs est maintenu fixe et tandis que le second se déplace sur le rail. On observe le signal périodique du second récepteur se déplacer sur l'écran de l'oscilloscope. Lorsque les deux récepteurs sont côte à côte, on observe la superposition des signaux. On peut montrer que les signaux coïncident lorsqu'ils sont décalés spatialement d'un multiple entier de la longueur d'onde λ .

On déplace donc lentement le second récepteur en comptant le nombre de coïncidences des signaux. Lorsque 10 coïncidences sont passées, on constate que le second récepteur est à la position 28.6 cm tandis que le premier est toujours à la position 20.2 cm.

1. Estimer à l'aide de la formule du cours l'incertitude-type sur la position d'un détecteur.
2. Estimer la distance séparant les détecteurs et en déduire avec la formule du cours son incertitude-type.
3. En déduire une valeur de la longueur d'onde λ et de son incertitude-type.

Mesure de la fréquence

On mesure sur l'oscilloscope la période d'un des signaux. On trouve $T = 24.4 \mu\text{s}$. Le calibre choisi dans la base temporelle de l'oscilloscope permet une mesure précise à $0.1 \mu\text{s}$ près.

4. En déduire l'incertitude-type sur la période.
5. Calculer la fréquence $\nu = 1/T$ correspondante du signal et, à l'aide d'une simulation Monte-Carlo, en déduire l'incertitude-type sur cette fréquence.

Mesure de la célérité

6. Calculer la célérité du son en utilisant la relation $c = \lambda\nu$ et estimer son incertitude-type à l'aide de la formule du cours.
7. Les deux mesures de célérité sont-elles compatibles entre elles?

7.2 Détermination de la valeur d'une capacité

Lors d'une séance de travaux pratiques, des élèves ont réalisé le circuit suivant de la charge d'un condensateur. À

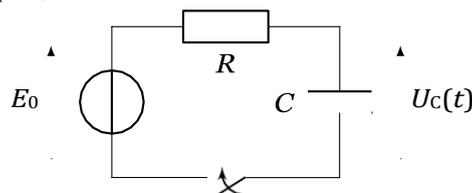


Fig. 4 – Schéma électrique de la charge du condensateur.

l'aide d'un logiciel, ils ont réalisé un ajustement exponentiel de la tension $U_C(t)$ dans le but de mesurer la constante de temps τ . Une étiquette sur le condensateur utilisé indique $1.00 \mu\text{F}$. Le tableau ci-dessous regroupe leurs données pour différentes valeurs de la résistance R .

R (en D)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
τ (en ms)	151	240	356	458	547	651	741	843	949	1041

Tab. 3 – Mesures de la constante de temps τ pour différentes résistances.

La résistance R est mesurée avec une incertitude-type relative de 2% tandis que la constante de temps est donnée par le logiciel avec une incertitude-type relative de 4%.

On rappelle que théoriquement, la constante de temps est définie par $\tau = RC$ avec R la résistance totale du circuit.

7.2.1 Traitement statistique des données

1. Calculer $C = \tau/R$ pour toutes les données. En déduire une valeur moyenne de C ainsi que son incertitude-type.
2. Conclure sur la compatibilité entre la mesure et la valeur affichée sur le condensateur.

7.2.2 Utilisation de la régression linéaire

3. Tracer τ en fonction de R , que constatez-vous? Qu'en déduisez-vous sur le modèle proposé.
4. Réaliser une régression linéaire à l'aide d'une simulation Monte-Carlo pour en déduire les paramètres du modèle ainsi que leurs incertitudes-type.
5. Conclure sur les valeurs mesurées.

7.3 Corrigés

Les corrigés sont rédigés avec des incertitudes-types à deux chiffres significatifs. Ce choix est plus judicieux pour éviter les problèmes de troncatures et d'arrondis. Par exemple 15 doit-il être arrondi à 10 ou à 20 si l'on conserve un seul chiffre significatif ? De plus, le nombre de chiffres significatifs est une question d'usage et d'esthétique plus qu'un problème théorique fondamental.

7.3.1 Mesures de la vitesse du son à l'aide d'ultrasons

Mesure par temps de vol

1. On a $c = d/\tau = 339.0$ m/s.
2. On calcule pour l'ensemble des valeurs expérimentales les valeurs de c que l'on trace sous forme d'histogramme à l'aide de python par exemple.

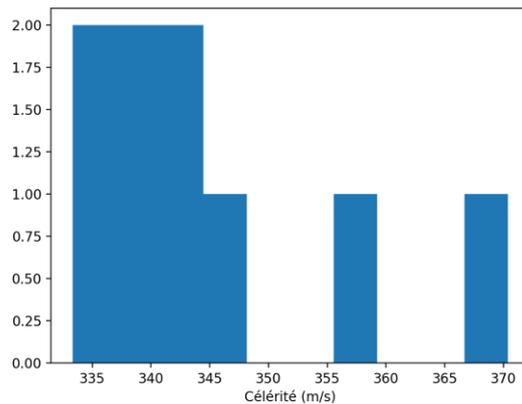
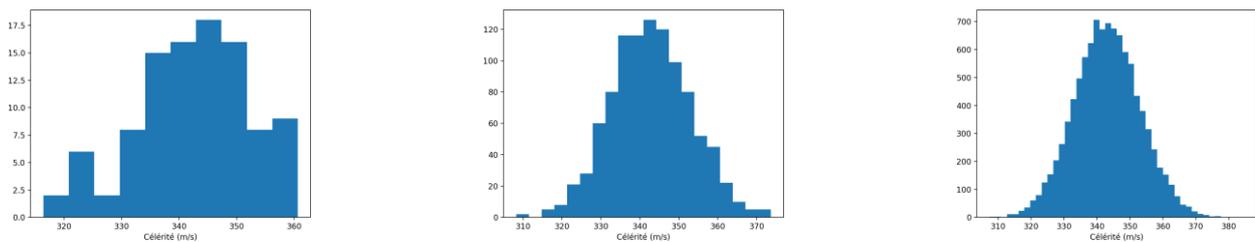


Fig. 5 – Distribution des dix valeurs expérimentales de vitesse

Complément : vers la distribution gaussienne

Imaginons que nous soyons capable de reproduire cette expérience un très grand nombre de fois. Voici à quoi pourraient ressembler les courbes pour 100, 1 000 et 10 000 expériences.



(a) Simulation de 100 expériences.
expériences.

(b) Simulation de 1 000 expériences.

(c) Simulation de 10 000

Fig. 6 – Vers la gaussienne...

La courbe de la figure 6c est celle qui s'approche le plus d'une distribution lisse, appelée distribution gaussienne. Cette courbe « en cloche » est caractéristique de très nombreux processus de mesure. Le fait que la distribution aléatoire tende vers une courbe gaussienne est un résultat qui se retrouve souvent en physique.

La distribution gaussienne s'observe de façon générale sur des grandeurs dont la valeur dépend d'une multitude de facteurs aléatoires et indépendants entre eux. Par exemple la taille des individus dans une population.

Pour ces trois simulations, on trouve une valeur moyenne autour de $c_m = 343$ m/s et un écart-type de $u(c) = 10$ m/s. Le résultat de la mesure est la donnée de ces deux grandeurs.

On peut montrer que, pour une distribution gaussienne, environ 68% des résultats du processus de mesure sont comprises entre $c_m - u(c)$ et $c_m + u(c)$ et 95% sont comprises entre $c_m - 2u(c)$ et $c_m + 2u(c)$.

- Sur cette distribution, on calcule l'écart-type et on trouve $u(c) = 11$ m/s. Ainsi, dans notre cas, la mesure unique effectuée est donc $c = (339 \pm 11)$ m.s⁻¹.
- La valeur moyenne de la distribution du groupe 1 vaut $c_{\text{moy}} = 344.5$ m/s (on rajoute des chiffres significatifs par rapport à la question précédente car nous n'avons pas encore évalué l'incertitude-type).
- On calcule l'écart-type des 10 différentes valeurs moyennes observées par les différents groupes, et on trouve $u(c_{\text{moy}}) = 3.3$ m/s. La valeur finale trouvée par moyenne est donc $c = (344.5 \pm 3.3)$ m.s⁻¹.
- On applique la formule du cours, à savoir $u(c_{\text{moy}}) = u(c) / \sqrt{N}$.
Dans notre cas, il y a $N = 10$ mesures individuelles de vitesses, soit $u(c_{\text{moy}}) = 3.6$ m/s. Les deux valeurs sont très proches, et on suppose qu'en élargissant le nombre de mesures et de groupes, on se rapprocherait encore plus de la valeur théorique. À notre niveau donc, lorsque ce n'est pas possible de réaliser une étude statistique sur les moyennes, on pourra utiliser directement la formule théorique.

Mesure par aspect ondulatoire

- La règle graduée est précise au millimètre. Cela implique qu'une mesure annoncée à 28.6 cm est en fait supposée être comprise entre 28.55 cm et 28.65 cm. L'incertitude-type est alors par définition $0.5 \text{ mm} / \sqrt{3} \approx 0.29$ mm. Ainsi, la mesure est (28.600 ± 0.029) cm.
- On a la distance entre les deux détecteurs $D = d_2 - d_1 = 8.40$ cm. Pour estimer l'incertitude-type, on applique la formule d'incertitudes composées de type somme, soit :

$$u(D) = \sqrt{u(d_1)^2 + u(d_2)^2} = u(d)\sqrt{2} \approx 0.41 \text{ mm}$$

car les incertitudes de mesure sont identiques pour chaque récepteur. On a donc $D = (8.400 \pm 0.041)$ cm.

- Par la mesure, on a $D = 10\lambda$. On en déduit donc $\lambda = D/10$. La variabilité de λ est donc 10 fois plus faible que celle de D , on a donc aussi $u(\lambda) = u(D)/10$. Ce résultat se retrouve par les formules du cours de type produit.

Il vient donc $\lambda = (0.8400 \pm 0.0041)$ cm. Il est à noter que si on avait calculé une seule longueur d'onde, l'incertitude-type aurait été dix fois plus importante. Mesurer plusieurs répétitions d'un phénomène périodique permet de diminuer significativement l'incertitude par rapport à la mesure directe d'une seule périodicité.

- L'incertitude-type est directement estimée à l'aide de la formule $\Delta/\sqrt{3}$, soit ici $u(T) = 0.057$ μs. Pour estimer l'incertitude-type sur la fréquence, nous devons utiliser une simulation Monte-Carlo. Pour cela, nous allons simuler aléatoirement à l'aide d'une distribution uniforme un grand nombre de fois une valeur d'une période. Puis nous calculerons l'inverse de chacune de ces périodes et nous prendrons enfin l'écart-type de cet ensemble.

Un corrigé python est disponible dans un fichier «[incertitude_frequence](#)» placé dans le dossier [Mesures et Incertitudes_python](#) accessible sur le drive de physique.

- On trouve alors $v = (40983 \pm 97)$ Hz

Remarque :

Pour une relation $y = f(x)$, la formule $u(y) = f'(x) u(x)$ n'est pas au programme. Toutefois, on la retrouve directement dans l'exemple traité.

Elle se justifie aisément par le fait que la fonction dérivée $f'(x)$ représente le taux de variation et la fonction f reliant x à y , au regard de x . La variabilité sur y , représentée par son incertitude-type $u(y)$ est donc directement reliée à la variabilité sur x .

- On en déduit la valeur de la célérité ainsi que son incertitude-type à l'aide de la formule de composition des incertitudes de type produit.

On a : $c = \lambda \cdot \nu$ d'où :

$$\frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(\nu)}{\nu}\right)^2}$$

Il vient directement : $c = (344.4 \pm 1.8)$ m.s⁻¹.

7. Pour comparer les deux valeurs de célérité c_1 et c_2 , on calcule l'écart normalisé entre les deux valeurs, soit :

$$E_N = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{u(c_1)^2 + u(c_2)^2}} \approx 0.03$$

Deux valeurs sont compatibles entre elles si leur écart normalisé est inférieur à 2, cette condition est largement vérifiée dans ce cas.

7.3.2 Détermination de la valeur d'une capacité

Un corrigé python est disponible dans un fichier « [incertitude_capacite](#) » placé dans le dossier [Mesures et Incertitudes_python accessible sur le drive de physique](#).

1. On trouve $C = (1.143 \pm 0.045) \mu\text{F}$ où l'incertitude-type est l'écart-type de la distribution divisé par $\sqrt{10}$ puisque correspondant à la moyenne faite sur un effectif de 10 mesures.
2. La valeur affichée n'ayant pas d'incertitudes, on calcule le nombre d'écart-type séparant la valeur affichée et la valeur mesurée à l'aide de l'écart normalisé.

On trouve :

$$E_N = \frac{|C_a - C_m|}{u(C_m)} \approx 3.20$$

Les deux valeurs sont incompatibles, la mesure étant le résultat d'une moyenne, sa variabilité n'est pas à remettre en cause. Ainsi, soit la valeur affichée est fautive, ce qui est rarement le cas à ce point, soit la modélisation physique pose problème.

3. On observe la courbe figure 7. On constate que les points sont bien alignés et donc qu'un modèle linéaire semble raisonnable. Toutefois, il semble qu'une régression linéaire ne passera pas par l'origine du graphe, un modèle du type $\tau = RC + \tau_0$ semblerait pertinent.

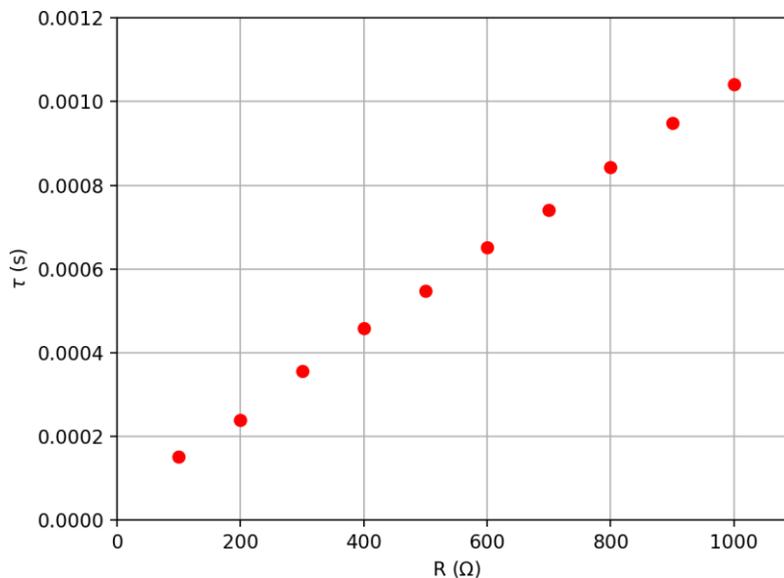


Fig. 7 – Tracé de τ en fonction de R .

4. Conformément aux préconisations du GUM, comme nous n'avons pas d'information pour savoir de quelle façon générer les valeurs, on choisit une distribution de probabilité uniforme qui permet de ne pas sous-estimer l'incertitude.

Attention, on rappelle que pour une distribution uniforme entre $x - \Delta$ et $x + \Delta$, on a la relation $\Delta \propto \sqrt{3}$

On trouve dans le cas qui nous intéresse la courbe 8. Le résultat donne $C = (0.992 \pm 0.034) \mu\text{F}$
et $\tau_0 = (52 \pm 14) \text{ms}$.

La courbe de tendance est suffisamment proche des barres d'incertitudes, la régression linéaire est validée. On rappelle que les barres d'incertitudes représentent les incertitudes-types qui sont la valeur typique de la variabilité de la mesure. Ainsi, deux valeurs séparées de quelques valeurs de l'incertitude-type sont compatibles, et donc il n'est pas nécessaire que la droite de tendance passe par toutes les barres d'incertitudes.

5. Cette fois, l'écart normalisé entre la valeur mesurée et la valeur attendue est seulement de 0.23, les deux valeurs sont clairement compatibles. De plus, cette ordonnée à l'origine conduit à une résistance supplémentaire dans le circuit valant $R_0 = \tau_0/C = (54 \pm 14) \Omega$.
6. Cela permet d'affiner la modélisation de l'expérience. En effet, cette valeur est compatible avec la valeur typique de 50 W de la résistance interne du générateur R_{int} qu'il faut ajouter à la résistance R pour obtenir la résistance totale du circuit. La modélisation $\tau = (R + R_{\text{int}})C$ est meilleure que simplement RC pour décrire les données expérimentales. Dans ce cas, la résistance interne n'est pas négligeable.