Intégration : fonctions primitives et intégrales définies

1. Primitives :

La notation : $\boxed{\int f(x)dx}$ renvoie à la recherche d'une ***fonction primitive*** de la fonction f(x),

c'est à dire d'une fonction F(x) telle que : dF(x)/dx = F'(x) = f(x)

La mise en oeuvre de cette notion se traduit concrètement pat l'emploi des formules de dérivation « utilisées en marche arrière » : $\int x^2dx = x^3$ /3 +cste etc...

On obtient de fait une ***famille de primitives***. En effet, F(x) n'est déterminée qu'à une constante près, F(x) + λ est aussi une primitive de f(x) puisque : d(F(x) + λ)/dx = dF(x)/dx

Remarquons que la notation de Leibnitz F'(x) = dF(x)/dx = f(x)

suggère une réécriture sous la forme : dF(x) = f(x).dx

La variation infinitésimale dF(x) de F(x) est proportionnelle à dx par la fonction f(x) dont F(x) est primitive. Ce point de vue sera repris à propos des intégrales définies...

En physique, le processus d'intégration en tant que recherche d'une primitive a en général non pas pour but de déterminer une ***famille de primitives***, mais plutôt d'obtenir une ***primitive particulière***, répondant à une ***condition limite***.

On a en fait généralement à résoudre un système de deux équations :

$$\left\{ \mathbf{F(x)} = \int \boldsymbol{f(x)dx} \quad ; \quad \mathbf{F(x_o)} = \mathbf{F_o} \right\}$$

Système d'équation fonctionnel, où l'inconnue est la fonction F(x).
La condition à la limite précise F(x) de façon unique.

La fonction F(x)+λ retenue sera celle dont le terme constant λ est tel qu'elle respecte la condition limite.

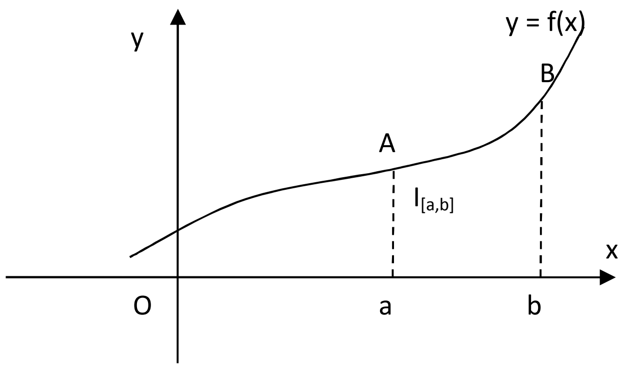
2. Intégrale définie :

On note : $\boxed{I = \int_a^b f(x)dx}$ ***l'intégrale définie*** de la fonction f(x) sur l'intervalle [a, b].

Cette quantité n'est plus une fonction, elle va correspondre à une quantité numérique (ou une expression littérale). Elle prendra une valeur réelle pour une fonction réelle f(x) et un intervalle donné [a, b].

Nous en donnerons surtout une interprétation géométrique :

(on exclut ici toutes les subtilités mathématiques : f(x) est supposée continue, définie sur [a, b], bornée, l'intégrale converge etc...)



La notation $I = \int_a^b f(x)dx$

Prend ici tout son sens : il s'agit d'une Somme de petits éléments f(x).dx, qui correspondent sur le graphe à des ***surfaces infinitésimales*** de largeur dx, compris entre x et x + dx, et de hauteur f(x). Le symbole $\int$, en forme de S allongé, renvoie à cette sommation.

L'intégrale $I_{[a,b]}$ est ***l'aire située sous la courbe*** y = f(x), entre les bornes a et b, somme des aires élémentaires.

Il est strictement indispensable d'indiquer dans une intégrale la variable d'intégration x par l'intervention de l'élément différentiel correspondant dx. Sans quoi la notation perd toute signification.

Plus encore, la présence de l'élément dx assure en physique l'homogénéité dimensionnelle nécessaire à toute expression.

Par exemples :

a) $I = \int_0^L \frac{x}{L} h.dx$ désigne la surface d'un triangle de hauteur h et de largeur L (tracer la fonction, développer le calcul...) :

$$I = \left[\frac{x^2}{2L} h\right]_0^L = \frac{hL}{2}$$

b) L'expression

$$W = \int_0^{\Delta t} p(t).dt = \int_0^{\Delta t} R.i(t)^2.dt$$

Sera l'énergie dissipée par effet Joule dans un résistor, sur une durée Δt, entre t = 0 et t = Δt.

La quantité $Ri(t)^2$ est la puissance dissipée par effet Joule dans le résistor à l'instant t, chaque terme infinitésimal $\delta W = Ri(t)^2.dt$ représente l'énergie élémentaire dissipée pendant une durée dt, entre les instants t et t + dt. La somme de ces termes infinitésimaux donne l'énergie W dissipée sur l'intervalle de temps Δt.

Revenons sur le problème présenté au chapitre précédent :

{ F(x) = $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ **; F(x$_o$) = F$_o$ }**

Système d'équation fonctionnel, où l'inconnue est la fonction F(x).
La condition à la limite précise F(x) de façon unique.

La résolution de ce système revient à résoudre l'équation :
$F(x) - F(x_o) = \int_{x_o}^{x} f(x')dx'$ où x' joue le rôle de variable muette d'intégration.

On aura donc finalement : $\boxed{F(x) = F(x_o) + \int_{x_o}^{x} f(x')dx'}$
Expression qui respecte par construction la condition F(x)= F(x_o) si x= x_o.

Remarque : on fera souvent l'abus de notation : $F(x) - F(x_o) = \int_{x_o}^{x} f(x)dx$
Qui n'est pas rigoureux puisque x ne peut pas désigner à la fois la borne d'intégration de l'intégrale définie et la variable d'intégration courant de x_o à x.

Le calcul d'une intégrale définie peut faire appel à deux types de procédés :

a. Si on connaît une primitive F(x) de la fonction f(x) à intégrer :
Alors : $I = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = \Delta F$
l'intégrale définie sera la variation de la primitive F(x) sur l'intervalle d'intégration.

b. S'il n'existe pas de primitive :
C'est à dire que l'on ne dispose pas d'expression analytique d'une fonction F(x) telle que F'(x) = f(x). C'est un cas extrêmement fréquent dans les problématiques relevant de la physique ou plus encore de l'ingénierie.

On procède alors par ***intégration numérique***.
Les techniques de calcul numérique utilisent dans leur principe la sommation d'éléments finis : les éléments différentiels sont assimilés à de petites quantités. On passe à une discrétisation de la variable x avec un pas Δx qu'on assimile à dx.
Les valeurs prises par x sur[a, b] sont une suite de valeurs x_n successives, séparées par le pas Δx, auxquelles correspondant des valeurs f_n= f(x_n) de la fonction à intégrer.
On somme alors des quantités f(x_n).Δx pour x_n variant de a à b.

Cette démarche se prête très bien à l'outil informatique.

Il existe des « variantes » : méthodes des trapèzes, etc... améliorant la convergence du calcul approché vers la valeur exacte de l'intégrale définie, et permettant ainsi d'économiser des pas de calcul (donc du temps de calcul).