Dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables

1. Fonctions à plusieurs variables :

Les fonctions abordées en mathématiques se limitent, jusqu'à présent, à : f : x →f(x).

Mais on a très couramment des fonctions dont la valeur dépend de différentes variables.

Exemples :

- volume d'une boîte parallélépipèdique V = V(x,y,z) = x.y.z
- pression dans un gaz (modèle du gaz parfait)   P = P(n, T,V) = nRT/V   où R = 8,314 $J.K^{-1}mol^{-1}$.
- position d'une image pour un système à focale variable (oeil, micro-lentille réglable par électrostriction...)
  à partir de la relation de conjugaison de Descartes :   p' = p'(p, f') = p.f'/(p + f')

2. Dérivées partielles :

La dérivée d'une fonction f d'une variable x s'écrit f'(x) = df/dx. Sa valeur en x_o $f'(x_o)$ représente le taux de variation de f(x) avec x au voisinage de x_o.
Pour une fonction de plusieurs variables : f : (x,y) →f(x, y)
Il faut envisager un taux de variation spécifique à chacune des variables.

On note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$$

le taux de variation local de f au regard de la variable x, au voisinage du point (x_o, y_o).

La quantité

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

est la fonction dérivée partielle de f par rapport à x , on lui associe une valeur à tout couple (x, y).

On définit de même :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

la fonction dérivée partielle de f par rapport à y , on lui associe une valeur à tout couple (x, y).

Le calcul littéral de ces quantités est très simple : il suffit d'appliquer les formules de dérivation, en considérant que seule la variable désignée est effectivement variables, les autres variables étant bloquées (considérées comme des constantes).

Application :

Calculer les dérivées partielles sur les exemples précédents.

Visualisation graphique de la notion de dérivée partielle :

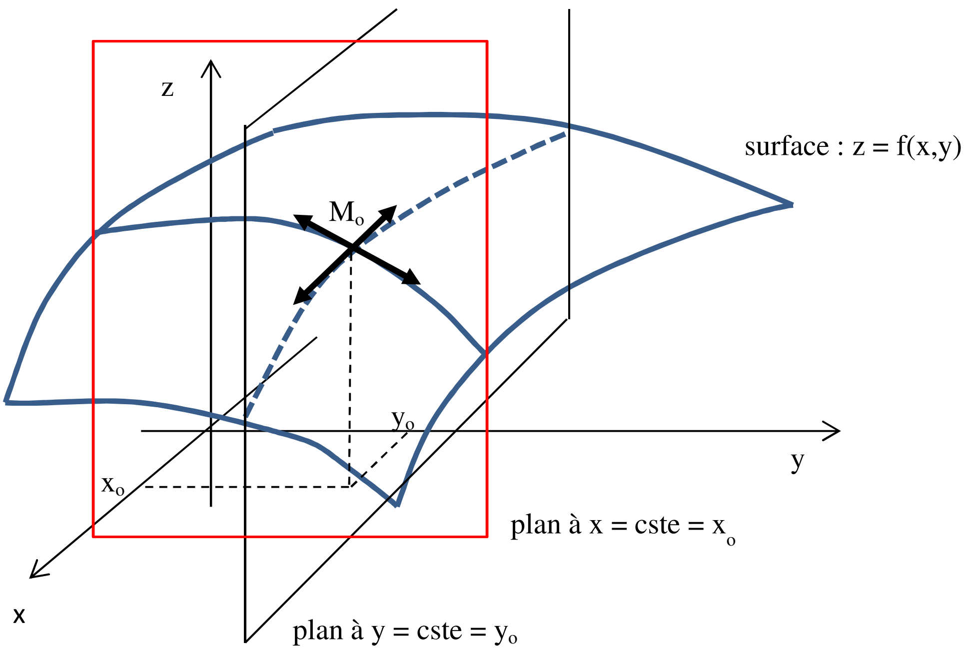
On pourra se figurer le problème par une représentation graphique en trois dimension en représentant la fonction z = f(x, y) par une surface dont la cote z dépend des coordonnées (x, y). En considérant les valeurs des dérivées partielles au point M_o, d'abscisse x_o et d'ordonnée y_o :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$$

Représentera la pente locale de la courbe obtenue par intersection de z = f(x, y) avec le plan parallèle au plan (O, y, z), d'abscisse $x = x_o$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$$

Représentera la pente locale de la courbe obtenue par intersection de z = f(x, y) avec le plan parallèle au plan (O, x, z), d'ordonnée $y = y_o$.



Attention : la notation

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

Représente un tout indissociable, puisqu'elle signifie « dérivée partielle de ... par rapport à ... ». La quantité ∂f n'aurait aucune signification.

Application au calcul d'incertitude :

Reprenons le chapitre 5 du polycopié sur les incertitudes :

5. Cas d'une mesure indirecte. Incertitude-type composée :

Dans ce cas, la grandeur mesurée Y n'est pas atteinte directement, mais par le biais d'autres grandeurs : $Y = f(X_1 , X_2,\ldots)$ où les grandeurs X_1, $X_{2,\ldots}$ sont directement mesurables et f est une fonction mathématique reliant Y à ces grandeurs.

On va rendre compte des différentes contributions dans l'erreur faite sur une mesure indirecte par un calcul différentiel.

La **dérivée partielle** de Y par rapport à la grandeur X_i , notée $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$ représente le **taux de variation** de Y vis-à-vis de X_i.

Du fait de cette relation de Y à X_i, un terme d'incertitude-type correspondant au produit de la dérivée partielle de Y par rapport à X_i par l'incertitude-type sur X_i est introduit.

L'incertitude-type sur Y peut être considérée comme une norme dans un espace des incertitudes : sa valeur est la racine de la somme des carrés des termes d'incertitude type relatifs aux différentes variables X_1, X_2,… dont dépend Y, sous réserve que ces variables soient indépendantes.

$$\boxed{u_c(Y) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i}\right)^2 .u^2(X_i)}} \quad (1)$$

où $u(X_i)$ est l'incertitude-type de la variable X_i.

Les logiciels de calcul d'incertitude réalisent bien sûr ce type de calcul automatiquement.

a. Cas d'une somme ou d'une différence de grandeurs.

exemple : Mesurage par double lecture sur une échelle graduée.

Lorsque la mesure nécessite une double lecture sur une échelle numérique, les erreurs de lecture peuvent se cumuler ; elles peuvent aussi se compenser, totalement ou partiellement.

La grandeur G retenue est obtenue par différence : $G = G_1 - G_2$

De façon évidente :

$$\frac{\partial G}{\partial G_1} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial G}{\partial G_2} = -1$$

Pour un double lecture, on a donc par application de la relation (1) :

$$u_{doublelecture} = \sqrt{(u_{lecture})^2 + (u_{lecture})^2} = \sqrt{2}.u_{lecture}$$

Où $u_{lecture}$ est l'incertitude-type pour la lecture de l'indication G_1 ou G_2 : $u_{lecture} = (1/2)\text{grad}/\sqrt{3}$

Pour un niveau de confiance de 95 %, l'incertitude à prendre en compte est alors, avec un facteur d'élargissement k = 1,96 ≈ 2

$$U_{doublelecture} = 2.\sqrt{2}.u_{lecture} = 2.\sqrt{2}.\frac{(1/2)grad}{\sqrt{3}}$$

Par exemple, avec une règle graduée en millimètres, la mesure de d met en jeu deux lectures (en 0 et en d le long de la règle) ; l'incertitude de lecture sur une distance *d* est donc :

$$U_{doublelecture}(d) = 2.\sqrt{2}.u_{lecture} = 2.\sqrt{2}.\frac{(1/2)1\ mm}{\sqrt{3}} = 0,8\ mm$$

En pratique, cette incertitude est souvent arrondie à 1 mm.

b. Cas d'un produit ou d'un quotient, d'une expression en puissances

Le calcul des dérivées partielles intervenant dans l'expression (1) donnée en (a) est plus pénible.
Il peut être éventuellement un peu allégé en passant intermédiairement par une expression logarithmique de la relation donnant la grandeur dont on cherche l'incertitude.

exemple :

On évalue une puissance dissipée par effet Joule dans un résistor de valeur R connue.

La relation $P = RI^2$ fournit P à partir de la mesure de l'intensité I réalisée à l'aide d'un ampèremètre.

Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial P}{\partial R} = I^2 = P/R$$

$$\frac{\partial P}{\partial I} = 2RI = 2P/I$$

$$u(P) = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial R}.u(R)\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I}.u(I)\right)^2} = \sqrt{\left(I^2.u(R)\right)^2 + \left(2RI.u(I)\right)^2}$$

ce qui conduit à l'incertitude élargie, pour un intervalle à 95% de confiance à :

$$U(P) = 1{,}96.P.\sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(2.\frac{u(I)}{I}\right)^2}$$

Considérant par exemple une résistance dont la valeur nominale est de 4,7 kΩ, à 5% près, ce qui signifie que les valeurs effectives de résistance répondent à une loi normale, avec un écart-type σ tel que l'intervalle de confiance à 95% est d'amplitude 1,96.σ = 0,05 x 4,7 kΩ = 0,24 kΩ.

La mesure de I est donnée par un ampèremètre. La lecture brute donne : I = 38,2 mA. Des considérations analogues à l'exemple précédent donné pour la lecture d'un appareil numérique amènent : U(I) = 0,5 mA.

Une fois calculées numériquement U(P), et P, on aboutit finalement à : P = (6,86 ± 0,36) W

En reprenant l'expression définissant l'incertitude-type absolue d'une grandeur G dépendant de grandeurs X_i :

$$u(G) = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial X_i}.u(X_i)\right)^2}$$

on peut réécrire en faisant apparaître l'incertitude-type relative :

$$\frac{u(G)}{G} = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial lnG}{\partial X_i}.u(X_i)\right)^2}$$

car

$$\frac{\partial lnG}{\partial X_i} = \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial X_i}$$

L'expression logarithmique d'une grandeur se présentant comme un produit conduit à une somme de termes logarithmiques, ce qui allège le calcul.

Vérifions le sur l'exemple traité précédemment

Le calcul des dérivées partielles logarithmiques simplifie en effet (un peu) les choses :

$\ln(P) = \ln(RI^2) = \ln(R) + 2.\ln(I)$

D'où :

$$\frac{\partial lnP}{\partial R} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\partial lnR}{\partial R} = \frac{1}{R}$$

Et de même :

$$\frac{\partial lnP}{\partial I} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial I} = \frac{\partial 2lnI}{\partial I} = \frac{2}{I}$$

Ce qui conduit un peu plus immédiatement à la relation :

$$\frac{u(P)}{P} = \sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(2.\frac{u(I)}{I}\right)^2}$$

et amène finalement :

$$U(P) = 1{,}96.P.\sqrt{\left(\frac{u(R)}{R}\right)^2 + \left(2.\frac{u(I)}{I}\right)^2}$$