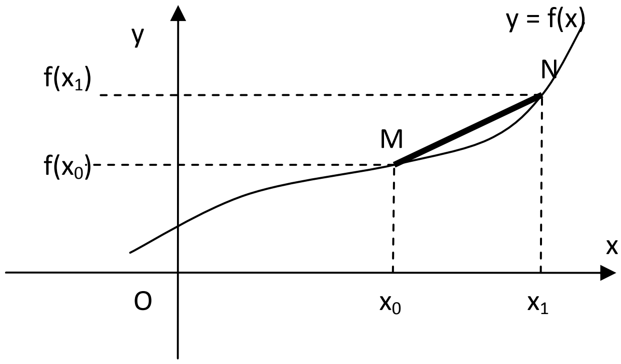
Dérivée d'une fonction d'une variable réelle

1. Taux d'accroissement, passage à la limite :

Soit une fonction f qui à tout réel x de son ensemble de définition associe son image f(x). On visualise cette fonction par son graphe y = f(x).

Par définition, le taux d'accroissement de f sur l'intervalle [x_0 ; x_1] est :



$$r = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

r est le coefficient directeur de la droite (MN) ;

si les axes (Ox) et (Oy) sont orthogonaux,

r = tanα où α est l'angle entre (Ox) et (MN).

r représente donc le « pente moyenne » entre M et N.

On peut rapprocher indéfiniment N de M, c'est-à-dire faire tendre x_1 vers x_0, sous réserve que la fonction f soit définie et continue en tout point del'intervalle [x_0 ; x_1].

Par définition, on nomme dérivée de f en x_0 la quantité : $f'(x_0) = \lim\limits_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

f'(x_0) est égale au coefficient directeur de la droite tangente en M à la courbe y = f(x). C'est la « pente locale » de la courbe y = f(x) en x = x_0.

2. Fonction dérivée première, définition :

On nomme fonction dérivée première de f la fonction f' associant à tout réel x de son intervalle de définition la valeur de dérivée de f en x, f'(x).

On peut définir : f' :x → $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

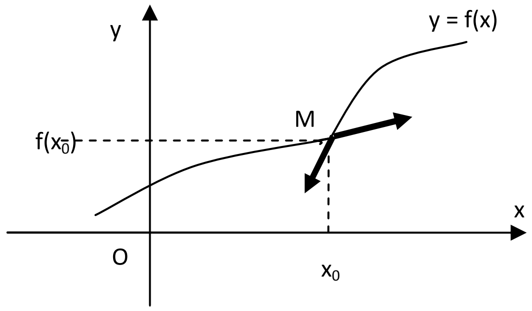
En pratique, on dispose d'un certain nombre de formules de dérivation relatives aux fonctions usuelles.

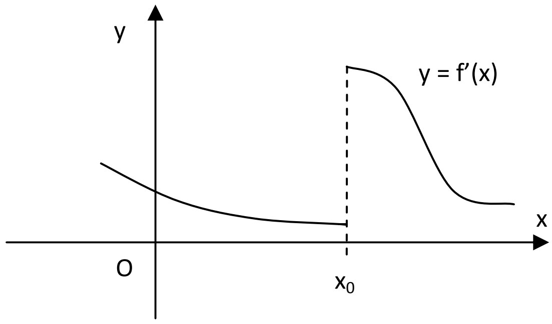
Des difficultés se posent lorsque f n'est pas définie, ou pas continue en x (voir cours d'Analyse).

Une fonction f peut être définie et continue en x_0, mais admettre deux limites différentes, à gauche et à droite, pour sa dérivée f'(x_0). f est alors non dérivable en x_0. La fonction dérivée première f' va donc alors subir une discontinuité en x_0.

La visualisation graphique de ce type de situation est assez simple (voir ci-dessous).

On ne développera pas plus ces notions ici, qui relèvent du cours de mathématiques.





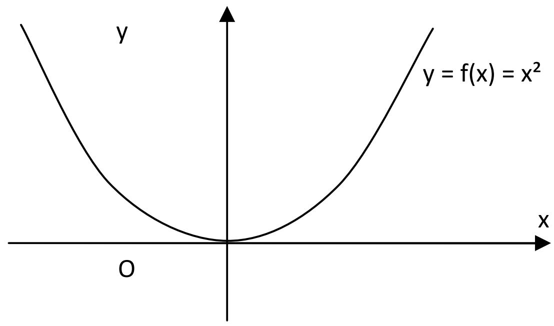
3. Dérivées successives :

Une fonction f'(x) ayant été définie en tant que fonction dérivée d'une fonction f(x), il est possible de définir la fonction dérivée seconde : f'' telle que f''(x) = [f'(x)]'.

Ce procédé peut bien sûr se généraliser à n dérivations successives.

Graphiquement, les valeurs de f'(x) représentent la pente du graphe y = f(x). Les valeurs de f''(x) représenteront donc les variations de cette pente. (Voir utilisation en 5.)

Exemple :



Le graphe de la fonction $f(x) = x^2$ est une parabole.

Le graphe de la fonction f'(x) = 2x est une droite.

La pente de y = f(x) est négative pourx< 0 et devient positive pour x > 0 ; f'(x) = 0 en x = 0

La dérivée seconde est f''(x) = 2. La pente augmente de façon monotone. Le taux de variation de cette pente est constant.

4.Notations :

Notation de Leibniz :(*anciennement francisé en Leibnitz)*

En notant : Δf = f(x + h) – f(x) et Δx = h = (x + h) – x

on obtient : $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ce qui se note : $f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x)$

La quantité « d » renvoie symboliquement à une variation infinitésimale.

La notation de Leibniz sera systématiquement employée en physique car :

- elle fait apparaître explicitement la ***variable de dérivation*** (qui ne sera pas toujours x…)
- elle permet une ***analyse dimensionnelle*** des expressions.

Ainsi v = dx/dtsignifie que la vitesse est la dérivée de la position sur un axe (Ox) par rapport au temps t ; la vitesse apparaît bien comme le rapport d'une longueur à un temps ($m.s^{-1}$).

La fonction dérivée seconde : f’’(x) = [f’(x)]’ s’écrit donc selon Leibniz :

$$f''(x) = \frac{d\left(f'(x)\right)}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{df}{dx}(x)\right)}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}(x)$$

Notation de Lagrange :

Elle est utilisée en général en physique pour symboliser les dérivations temporelles.

Ainsi pour un mobile se déplaçant le long d’un axe (Ox), dont la position est repérée par l’abscisse x, on notera la vitesse : $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ et l’accélération : $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

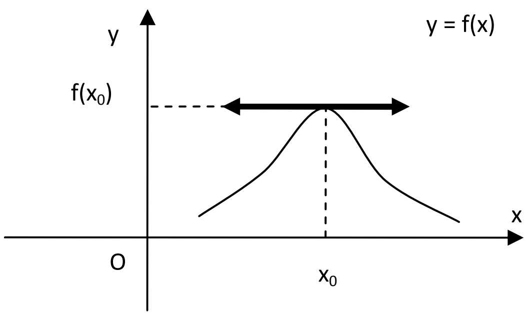
Chaque point représente une dérivation par rapport au temps, donc introduit un facteur s^{-1} sur les unités : la vitesse v est en $m.s^{-1}$ et a en $m.s^{-2}$.

5. Extrémum d’une fonction :

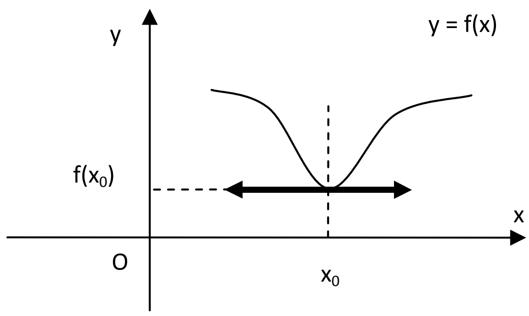
La recherche d’un extrémum peut répondre à deux problématiques différentes, selon le contexte : soit il s’agit de prouver l’existence d’un extrémum en un point d’abscisse x_0, soit il s’agit simplement de situer la position $x_0$de l’extrémum d’une fonction, dont on sait par ailleurs qu’il existe sur l’intervalle étudié.

● Dans le premier cas, l’existence d’un extrémum en x répond à deux conditions :

- en x_0 on doit avoir $f'(x_0) = 0$. Graphiquement, cela se traduit par une tangente horizontale sur la représentation y = f(x))
- f’(x) change de signe en x_0 , ce qui revient à ce que f’’(x) garde un signe constant au voisinage de x_0. Graphiquement, la concavité de la courbe y = f(x) conservera la même orientation au voisinage de x_0.

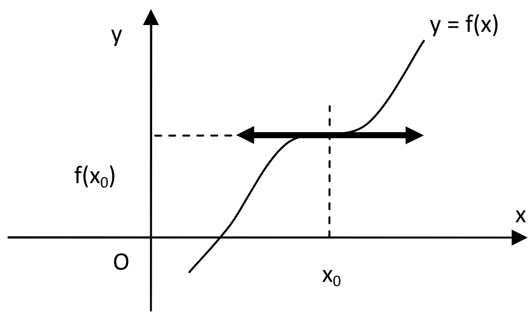


maximum en x_0 : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x) < 0$



minimum en x_0 : $f'(x_0) = 0$ et $f''(x) > 0$

Pas d’extrémum en x_o
$f'(x_0) = 0$ mais f’(x) conserve le même signe à gauche et à droit de x_0, f’’(x) s’annule en x_0 (point d’inflexion).



Remarque : en mathématiques, l'usage est de présenter le traitement de ces questions à l'aide d'un **tableau de variation**.

Ainsi, dans le cas d'un maximum de la fonction f en x_o le tableau de variation aura pour forme :

Variable x	x_o	x_o
Signe de f'(x)	+	-
f(x)	$\nearrow$ $f(x_o)$	$f(x_o)$ $\searrow$

Cette présentation n'a d'intérêt que dans des situations où la complexité du questionnement le justifie.

● Dans le second cas, fréquent en physique, **on connaît assurément** l'existence d'un maximum pour la grandeur étudiée (comportement expérimental observé…) et l'on ne souhaite que déterminer par le calcul la position x_0 de ce maximum.

Il s'agira alors simplement de résoudre l'équation f'(x) = 0 ; la (ou les solutions) correspondront à la (ou les) valeurs cherchées. Aucune discussion mathématique n'est nécessaire, dans ce contexte, sur l'existence de l'extrémum.

6. Courbe dérivée, courbe intégrale :

La courbe dérivée est le graphe y = f'(x) de la fonction dérivée d'une fonction f donnée. Elle traduit donc l'évolution de la pente de la courbe y = f(x) considérée.

La courbe intégrale est le graphe y = F(x) d'une fonction primitive F d'une fonction f donnée. Le graphe y = f(x) doit donc représenter l'évolution de la pente de la courbe y = F(x).

(Voir exemples en cours)

7. Dérivation composée :

Le formulaire distribué en début d'année récapitule les formules classiques de dérivation des fonctions usuelles (à connaître impérativement !).

Cependant, les fonctions employées en physique sont fréquemment envisagées comme des fonctions composées.

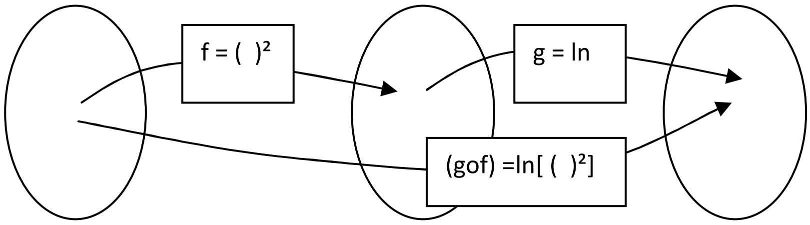
Fonction composée :

Qu'est-ce que la composition de fonction ? Une fonction établit une relation entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée.

On peut par exemple définir la fonction $f : x \rightarrow f(x) = x^2$

Ou encore la fonction $g : x \rightarrow g(x) = \ln x$

La composition des fonctions f et g est notée(*go* f) (prononcer g « rond » f) ; g *o* f = g[f( )]



par définition (g *o* f)(x) = g[f(x)] soit sur notre exemple : (g *o* f)(x)= g[f(x)] = ln(x^2).

Dérivation d'une fonction composée :

Théorème de dérivation composée :

La dérivée de la fonction (g *o* f)(x) = g[f(x)] répond à l'expression :(g *o* f)'(x) = g'[f(x)].f'(x)

Applications :

Sur l'exemple précédent : $(\ln(x^2))' = (1/x^2).2x = 2 / x$

Autre exemple :

$$\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Pour finir sur un exemple qui nous sera immédiatement très utile, les phénomènes oscillatoires sont décrits par des fonctions du temps t de forme : $f(t) = A.\cos(\omega.t + \phi)$

où les quantités ω et ϕ sont des constantes.

L'argument de la fonction cos est l'angle $\theta = \omega.t + \phi$, qui apparaît comme une fonction du temps t.

La fonction f(t) est donc une fonction composée : $f(t) = A.\cos(\theta(t))$

Le théorème de dérivation composée s'écrit assez naturellement en notation de Leibniz :

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d\left(A.\cos(\theta)\right)}{d\theta}.\frac{d\theta(t)}{dt} = -A.\sin(\omega.t+\varphi).\omega$$

Applications :

Montrer que : $f''(t) = - A.\omega^2.\cos(\omega.t + \phi)$

Soit $g(t) = B.\sin(\omega.t + \phi)$. Etablir de même : $g'(t) = B.\omega.\cos(\omega t + \phi)$.

Puis $g''(t) = - B.\omega^2.\sin(\omega.t + \phi)$.

Formulaire des dérivées usuelles.

Fonction	**Fonction dérivée**
X	**1**
X^n (n = cste)	**$n.X^{n-1}$**
$1/X$	**$-1/X^2$**
e^X	**e^X**
sin(X)	**cos(X)**
cos(X)	**-sin(X)**
tan(X)	**$1/(\cos^2(X)) = 1/(1 + \tan^2(X))$**
Ln|X|	**1/X**
$ch(X) = (e^X + e^{-X})/2$	**$sh(X) = (e^X - e^{-X})/2$**
$sh(X) = (e^X - e^{-X})/2$	**$ch(X) = (e^X + e^{-X})/2$**

La formule $(X^n)' = n.X^{n-1}$ doit pouvoir appliquée à tous cas de figure. En particulier pour des exposants négatifs ou fractionnaires.
Par exemple : $(1/X)' = (X^{-1})' = (-1).X^{-2} = -1/X^2$ ou encore : $(\sqrt{X})' = (X^{1/2})' = (1/2).(X^{-1/2}) = 1/(2\sqrt{X})$

Dérivation composée :
La dérivée de la fonction $(g\ o\ f)(x) = g[f(x)]$ répond à l'expression :$(g\ o\ f)'(x) = g'[f(x)].f'(x)$

Formulaire des primitives usuelles.

Fonction	**Fonction primitive (à une constante près)**
X	**$X^2/2$**
X^n	**$X^{n+1}/(n + 1)$**
e^X	**e^X**
sin(X)	**-cos(X)**
cos(X)	**sin(X)**
1/|X + a| (a = cste)	**Ln|X + a|**
sh(X)	**ch(X)**
ch(X)	**sh(X)**