Calcul vectoriel

(voir aussi cours de S.I.)

Un vecteur est généralement défini par ses coordonnées, déterminées dans un repère muni d'une base (usuellement orthonormée).

La présentation des coordonnées vectorielles en colonne est très efficace :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \quad \text{sur la base } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}).$$

La norme (ou module) d'un vecteur est égale à la racine carrée de son carré scalaire :
$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\bullet\vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}$. Soit : $\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

On prendra garde à distinguer sans équivoque les quantités vectorielles (notées avec une flèche) et les quantités scalaires (à valeurs réelles).

<u>Produit scalaire de deux vecteurs :</u>

Le produit ***scalaire*** de deux vecteurs mène à un ***nombre réel*** (grandeur ***scalaire***), et non à un vecteur.

$$\boxed{\vec{u}\bullet\vec{u}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'}$$

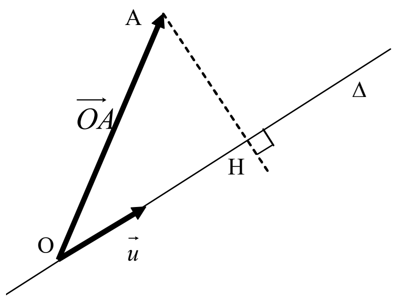
La valeur du produit scalaire de deux vecteurs répond aussi à l'expression :

$$\boxed{\vec{u}\bullet\vec{u}' = \|\vec{u}\|.\|\vec{u}'\|.\cos(\vec{u},\vec{u}')}$$ où $(\vec{u},\vec{u}')$ est l'angle existant entre ces deux vecteurs.

<u>Propriété importante :</u>

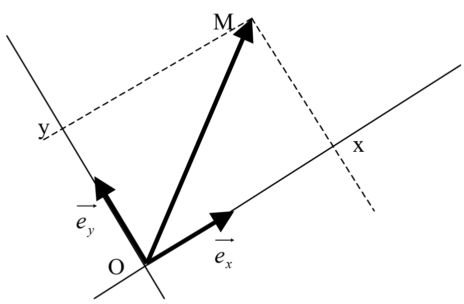
Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est, bien sûr, nul. Il y a équivalence entre les propositions : $\vec{u}\bullet\vec{u}' = \|\vec{u}\|.\|\vec{u}'\|.\cos(\vec{u},\vec{u}') = 0 \Leftrightarrow$ le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur $\vec{u}'$ sont orthogonaux.

<u>Interprétation géométrique</u> :



Soit $\vec{v}$, vecteur unitaire porté par un axe Δ. Le produit scalaire d'un vecteur quelconque $\vec{B}$ par cet unitaire correspond à la mesure algébrique de la *projection* du vecteur $\vec{B}$ sur l'axe Δ.

Ainsi le produit scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{OA}$ par un vecteur unitaire $\vec{u}$ correspond à la mesure algébrique $\overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point A sur l'axe Δ portant $\vec{u}$.



Ainsi, pour un point M de coordonnées (x, y) sur une base $(\vec{e_x},\vec{e_y})$: $x = \overrightarrow{OM}\bullet\vec{e_x}$ et $y = \overrightarrow{OM}\bullet\vec{e_y}$

Soit encore : $\overrightarrow{OM} = (\overrightarrow{OM}\bullet\vec{e_x})\,\vec{e_x} + (\overrightarrow{OM}\bullet\vec{e_y})\,\vec{e_y}$

Produit vectoriel de deux vecteurs :

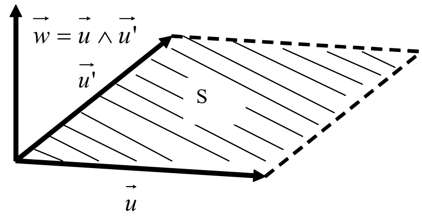
Le résultat du ***produit vectoriel*** de deux vecteurs est un ***vecteur***. $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{w}}$

- Sa direction est orthogonale au plan défini par les deux vecteurs dont on fait le produit.
- Son sens est défini conventionnellement $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{w})$ doit constituer un trièdre direct (règle "du tire-bouchon", ou "des trois doigts de la main droite" ou ... du tube de colle !).
- Sa norme répond à : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{u}'\|.|\sin(\vec{u}, \vec{u}')|$

Interprétation géométrique :

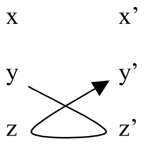
Cette norme correspond à l'aire S du parallélogramme défini par les deux vecteurs :

Le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{w}$ est donc un vecteur orthogonal au plan $(\vec{u}, \vec{u}')$, dont la norme est l'aire délimitée par les deux vecteurs.

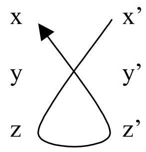


Calcul à partir des coordonnées : $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{u}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}}$

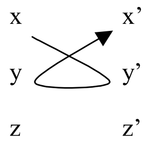
Moyen mnémotechnique :



première coordonnée :
yz' – zy'



seconde coordonnée :
x'z – z'x



troisième coordonnée :
xy' – yx'

Propriétés importantes :

- Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est, bien sûr, nul. Il y a équivalence entre les propositions : $\boxed{\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{w} = \vec{0} \iff \text{le vecteur } \vec{u} \text{ et le vecteur } \vec{u}' \text{ sont colinéaires}}$.

- Le produit vectoriel n'est **pas commutatif** : $\boxed{\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})}$ la commutation des deux vecteurs amène un résultat opposé.

- Le produit vectoriel n'est **pas associatif** : $\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \neq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}}$

Formule du double produit vectoriel : $\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \bullet \vec{c}).\vec{b} - (\vec{a} \bullet \vec{b}).\vec{c}}$

(Pour le premier terme, penser à « Ah, C'est Bien ! »).

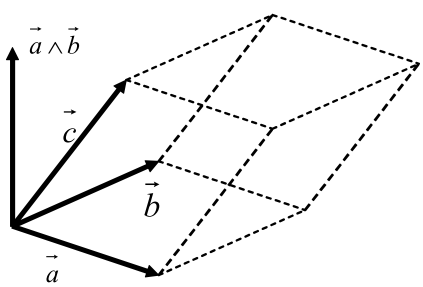
Produit mixte de trois vecteurs :

On note $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ le produit mixte $\vec{w} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{c}$, dont le résultat est une quantité scalaire.

Toute permutation circulaire des trois vecteurs laisse le résultat du produit mixte inchangé. Une permutation non circulaire ne fait qu'inverser le signe du résultat.

La valeur absolue du produit mixte correspond au volume du parallélépipède défini par les trois vecteurs :

Son signe est positif lorsque $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ constitue un trièdre direct (cas de la figure) ; il est négatif dans le cas contraire.



$\vec{w} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \bullet \vec{c} = 0$ si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont coplanaires.