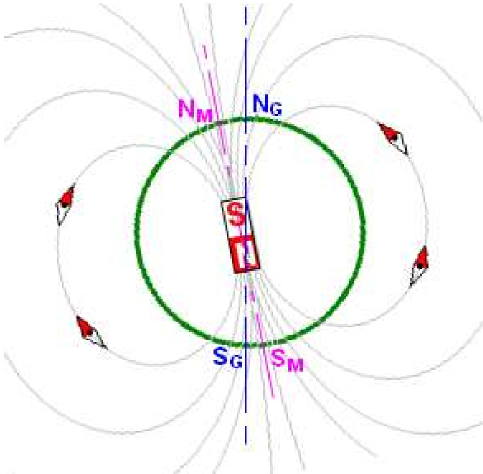
Champ magnétique

## 1. Premières observations.

Historiquement, l'observation des phénomènes magnétiques remonte à l'antiquité où l'on a constaté l'interaction d'aimants entre eux.

L'utilisation de la boussole, fondée sur l'interaction d'un petit aimant avec le champ magnétique terrestre, remonte à l'an mille en Chine ; son entrée en Europe ayant eu lieu au début du $16^{\text{ème}}$ siècle (le mot boussole date de 1527).
Le comportement d'une boussole consiste en un alignement de l'aimant dans la direction et le sens du champ magnétique terrestre, chacun des pôles de l'aimant s'orientant respectivement vers le Nord ou le Sud, ce qui détermine leur nom. (voir figure ci-contre).



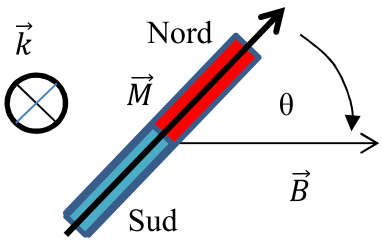

Le champ magnétique $\vec{B}$ est une grandeur vectorielle qui détermine en chaque point de l'espace la direction et l'intensité des actions magnétiques exercées par une distribution d'aimants ou de courants électriques.

Une étude plus complète permet d'établir l'expression du moment $\vec{\mathcal{M}}$ du couple exercé par un champ magnétique sur un aimant :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{M} \wedge \vec{B}$$

Ce couple est égal au produit vectoriel du moment magnétique $\vec{M}$ de l'aimant par la valeur du champ régnant dans la région où se situe l'aimant. Ce moment magnétique est une grandeur caractérisant complètement l'interaction de l'aimant avec le champ magnétique $\vec{B}$ .

Nous étudierons plus complètement ce moment magnétique, mais retenons dans l'immédiat que pour un aimant droit, ou pour l'aiguille d'une boussole, le moment magnétique est porté par la direction de cet aimant, et il est orienté du pôle Sud vers le pôle Nord de l'aimant.




En introduisant l'angle θ entre les deux vecteurs, orienté de $\vec{B}$ vers $\vec{M}$ :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \vec{M} \wedge \vec{B} = +M.B\sin\theta\vec{k}}$$

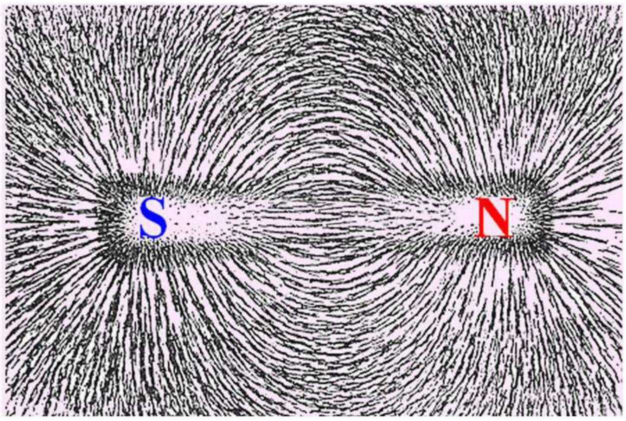
On remarquera que l'équilibre, défini par l'annulation du couple, est atteint lorsque le moment magnétique et le champ magnétique sont colinéaires soit pour : θ = 0 modulo π.

La position θ = 0 correspond à une **position d'équilibre stable**, tandis que la valeur θ = π conduit à un **équilibre instable** : l'aiguille d'une boussole placée dans un champ magnétique va s'orienter dans la direction du champ magnétique.

Une méthode expérimentale pour observer les champs magnétostatiques consiste à disposer un certain nombre de petites boussoles dans la région voulue. Les aiguilles vont alors s'orienter selon les lignes de champ.

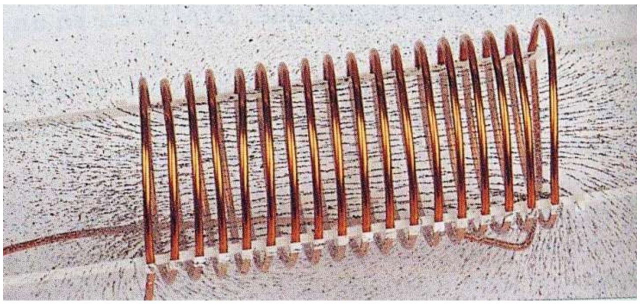
On visualisera aussi les lignes de champ en saupoudrant de la limaille de fer sur un plan plongé dans le champ magnétique.

Chaque grain de limaille va s'aimanter sous l'action du champ et s'aligner sur celui-ci. De par l'interaction entre grains, la limaille aura tendance à s'agglutiner selon des tracés correspondant aux lignes de champ.(spectre magnétique...).




Spectre du champ magnétique produit par un aimant droit :

Un champ magnétique peut aussi être produit par le passage d'un courant dans un conducteur.



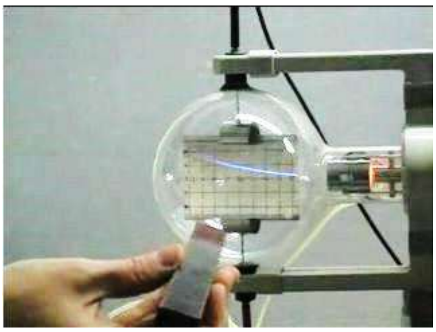
On va usuellement accumuler cet effet en employant des spires constituants un bobinage donnant un champ relativement intense dans la région située à l'intérieur des spires.

## 2. Définition du champ magnétique ; caractère axial :

Nous avons déjà précédemment employé la notion de champ magnétique pour décrire les mouvements de particules chargées soumises à de tels champs.

L'expérience classique consiste en la déviation d'un faisceau d'électrons dans une ampoule à vide par un champ magnétique produit par des bobines de Helmholtz. Le champ est quasi-uniforme entre les bobines. (voir expérience présentée en salle de TP, avec une trajectoire en hélice, ainsi que celle vue en cours (photographie)...).

La trajectoire observée dépend de la vitesse d'entrée des électrons dans le champ :
- si elle est orthogonale au champ magnétique, la trajectoire sera circulaire ;
- si au contraire la vitesse initiale comporte une composante colinéaire au champ magnétique, la trajectoire est alors une hélice d'axe colinéaire au champ.



Le rayon de l'hélice ou de la trajectoire circulaire est proportionnel à la vitesse d'entrée des électrons (du moins de sa composante orthogonale au champ) et inversement proportionnelle à la norme du champ magnétique, B.

Ces résultats s'interprètent à partir de l'action de la force magnétique d'expression :

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

Cette force produit une déviation du faisceau en accord avec les résultats expérimentaux.
La **force magnétique** traduit l'action sur la charge q, de vitesse $\vec{v}$, d'une distribution de courants ou d'aimants produisant globalement un champ magnétique en la position de la charge q à l'instant considéré.

Cette dernière expression définit $\vec{B}$. $\vec{B}$ est un **champ de vecteur**, c'est à dire une fonction qui à une position M dans l'espace associe une valeur vectorielle $\overrightarrow{B(M)}$.
Les valeurs $\overrightarrow{B(M)}$ sont telles qu'une particule passant en M à la vitesse $\vec{v}$ et portant une charge q subit la force magnétique $\overrightarrow{F_m}$.

La description par un champ magnétique rend compte de la modification de l'espace, du point de vue magnétique, dûe à la présence des **sources de champ**, c'est à dire des entités qui créent les effets magnétiques (aimants, distribution de courants électriques...).
Le champ magnétique existe même en l'absence d'un évènement révélant sa présence, comme le passage d'une particule chargée animée d'une vitesse.

Cette définition fait intervenir un **produit vectoriel** : le sens de $\overrightarrow{B(M)}$ dépend donc de la convention d'orientation de l'espace (définissant les règles de calcul du produit vectoriel).

$\overrightarrow{F_m}$ a une réalité physique, et donc un sens bien déterminé, alors que $\overrightarrow{B(M)}$, du moins son sens, n'a pas de signification intrinsèque.

$\overrightarrow{B(M)}$ est un **pseudo-vecteur** ou **vecteur axial**. Son sens dépend de la définition conventionnelle du sens direct.

## 3. Propriétés géométriques du champ magnétique.

### 3.0 Loi de symétrie de Curie.

On nomme opération de symétrie (OS) toute opération de transformation de l'espace conservant les distances et les angles (isométrie en mathématiques).
Un système est doté d'un élément de symétrie quand l'opération de symétrie correspondante le laisse inchangé.

Exemples :
Une table est dotée de deux plans de symétrie, une chaise d'un seul ; un tube cylindrique est doté d'un axe de symétrie de révolution…

Enoncé :

**Un phénomène physique doit contenir au moins les éléments de symétrie de ses causes.**

Pierre Curie a énoncé cette loi comme une propriété naturelle, mais elle a été démontrée mathématiquement depuis à partir de la théorie des groupes.

Exemples :

1. On jette un caillou dans l'eau. Il se forme des ondes progressives gravito-capilaires de formes circulaires, car dans le plan correspondant à la surface de l'eau, toute rotation autour du point d'impact laisse le problème inchangé.

2. Le champ de gravitation terrestre, est à symétrie sphérique. Tout plan passant par le centre la Terre, supposée sphérique est un plan de symétrie. Le champ respecte les mêmes symétries.

3. Le champ électrique créé par deux plaques (on néglige les effets de bord) doit respecter les mêmes symétries que la distribution de charge qui le crée.

Remarquons que la force électrique appliquée à une charge ponctuelle q placée dans un champ électrique est directement proportionnelle à celui-ci : $\vec{F} = q\vec{E}$

Force et champ électrique répondront donc aux **mêmes obligations de symétrie**.

Par contre, le champ magnétique est relié au phénomène action magnétique par une relation mettant en jeu un produit vectoriel :

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

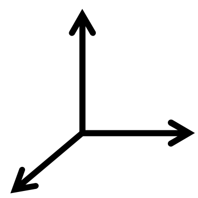
Ce qui va modifier les conclusions à tirer sur le champ magnétique par rapport à celles que l'on va exprimer pour sa conséquence, la force magnétique…

Comme on va le voir, selon le type d'opération de symétrie, l'intervention du produit vectoriel dans la relation de $\vec{B}$ à $\vec{F}$ pourra amener à renverser les conclusions sur $\vec{B}$.

## 3.1 Caractère axial du champ magnétique et opérations de symétries :

En effet, la définition d'un trièdre de sens direct (x, y, z) est purement conventionnelle :

$$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y} \quad \text{etc…}$$



On nomme **Opération de Symétrie** (OS) (ou isométrie) une transformation de l'espace conservant les distances.

Les principales OS sont les translations, les rotations, et les symétries.

Pour une opération de **translation** ou de **rotation**, le sens du trièdre n'est pas affecté. On parle d'**opérations de symétries positives**.

L'existence de propriétés de symétrie pour la distribution de courant qui crée le champ magnétique aura des conséquences directes sur la géométrie de celui-ci.

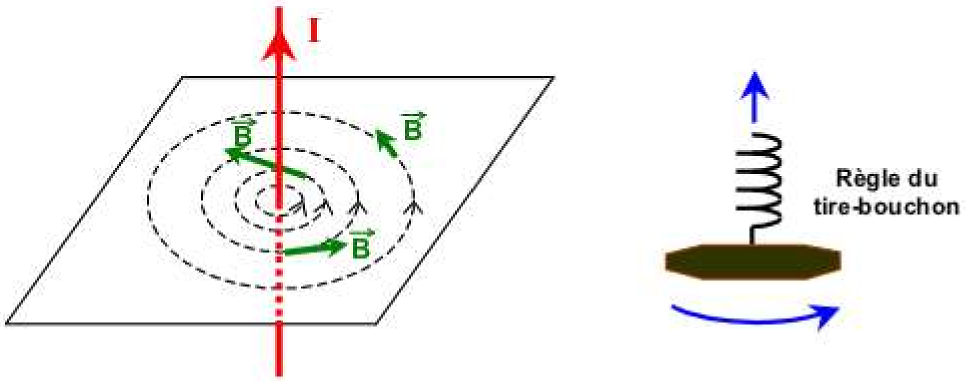
● Si la distribution D est invariante par une Opération de Symétrie positive, le champ magnétique produit aura la même propriété :

La conséquence en est que si l'on a invariance de la distribution D par translation ou par rotation, le champ $\vec{B}$ (M') existant au point M', image du point M par cette opération de symétrie, est relié au champ $\vec{B}$ (M) régnant en M par la même opération de symétrie S :

$$\boxed{\text{Pour } M' = S(M),\ \vec{B}(M') = S[\vec{B}(M)]}$$

**Exemple :**

Champ produit par un fil rectiligne "infini".

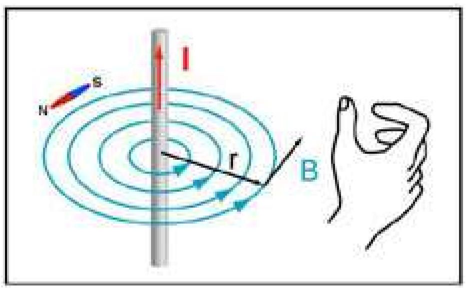


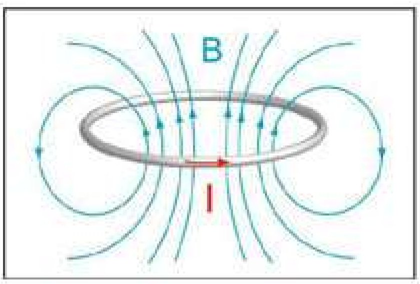

Toute rotation autour de l'axe (Oz) portant le fil laisse la distribution de courant inchangée. Le champ magnétique est transformé par la même opération.

Les lignes de champ sont des courbes tangentes en tout point au champ magnétique et orientées dans le sens du champ. Elles figurent en pointillé sur la figure précédente.

Remarquons que ces lignes de champ s'enroulent autour du conducteur produisant le champ magnétique. Le sens de cet enroulement est déterminé par la "règle du tire-bouchon" qui définit le sens direct.

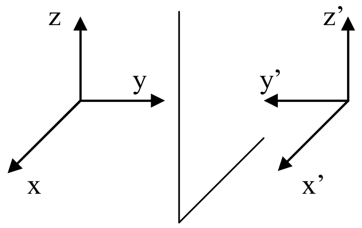
Un autre moyen mnémotechnique : en orientant le pouce de la **main droite** dans le sens du courant électrique parcourant le fil, les autres doigts vont figurer les lignes du champ magnétique produit.




De même, une spire circulaire de courant est une distribution respectant une symétrie de révolution autour de l'axe de la spire. Le champ magnétique est transformé par la même opération de rotation autour de cet axe.

● Au contraire, pour une **symétrie plane** $S_p$, l'opération de symétrie amène une **inversion** de l'espace, on parle d'**opération de symétrie négative**.
Un trièdre direct (x, y, z) est transformé par symétrie plane en un trièdre indirect.




La conséquence en est que si l'on a invariance de la distribution D par la symétrie plane $S_p$, le champ $\vec{B}$ (M') existant au point M', image du point M par cette opération de symétrie, est égal à **l'opposé du symétrique** du champ magnétique au point M, $\vec{B}$ (M) :

$$\boxed{\text{Pour } M' = S_p(M),\ \vec{B}(M') = -S_p[\vec{B}(M)]}$$

**Exemple :**
Sur le cas du fil rectiligne, on pourra vérifier que les plans passant par l'axe du fil sont des plans de symétrie, et que le champ magnétique respecte la propriété énoncée.

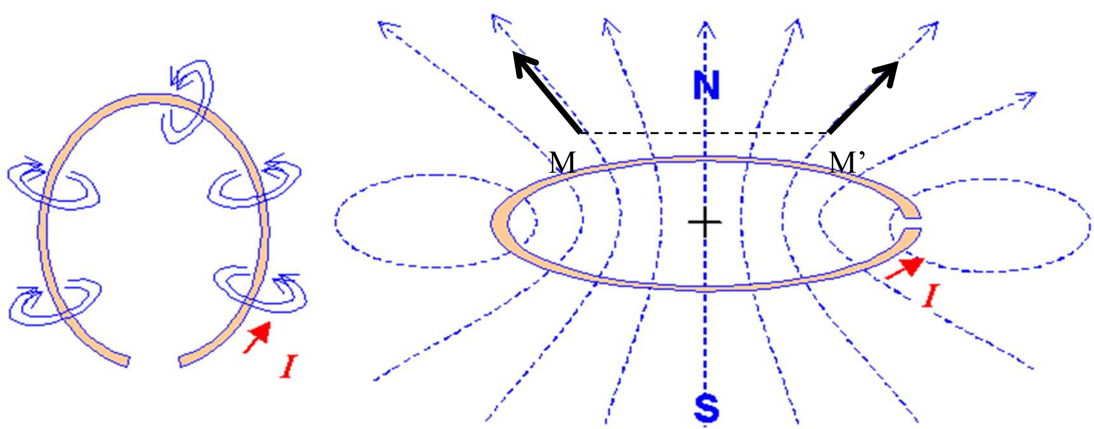
● Une **antisymétrie plane** $S_{ant\pi}$ est une opération de symétrie qui consiste à opérer une symétrie de la distribution de courant envisagée par rapport à un plan antπ, puis à renverser le sens des courants. C'est au bilan une opération de symétrie positive.
En deux points M et M' se correspondant par symétrie par rapport au plan d'antisymétrie antπ, le champ magnétique $\vec{B}$ (M') existant au point M', image du point M par cette opération de symétrie, est égal au **symétrique** du champ magnétique au point M, $\vec{B}$ (M) :

$$\boxed{\text{Pour } M' = S_{ant\pi}(M),\ \vec{B}(M') = S_{ant\pi}[\vec{B}(M)]}$$

**Exemple :**

Sur le cas du fil rectiligne, on pourra vérifier que les plans orthogonaux à l'axe du fil sont des plans d'antisymétrie, et que le champ magnétique respecte la propriété énoncée.

Sur le cas de la spire de courant, on pourra vérifier que les plans passant par l'axe de la spire sont des plans d'antisymétrie, et que le champ magnétique respecte la propriété énoncée.



### 3.2 Recherche de la direction d'un champ magnétostatique :

On accèdera à cette information par des considérations de symétrie en des points appartenant à un élément de symétrie de la distribution qui crée $\vec{B}$.
Les propriétés énoncées ci-après permettront de déterminer la direction du champ en un point M, pourvu que ce point M appartienne à un des éléments de symétrie envisagés.

***(a) Cas d'un plan de symétrie :***

**En un point M appartenant à un plan de symétrie $\Pi_S$ de la distribution D de courant produisant le champ $\vec{B}$, le champ magnétique $\vec{B}$(M) sera orthogonal au plan $\Pi_S$.**

***(b) Cas d'un plan d'antisymétrie :***

**En un point M appartenant à un plan d'antisymétrie $\Pi_{antS}$ de la distribution D de courant produisant le champ $\vec{B}$, le champ magnétique $\vec{B}$(M) sera compris dans le plan $\Pi_{antS}$.**

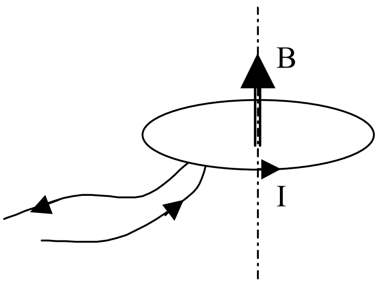
***(c) Intersection de plans d'antisymétrie ou de symétrie:***

**En des points situés à l'intersection de différents plans d'antisymétrie, le champ $\vec{B}$ devant être coplanaire à chacun d'eux, il sera colinéaire à l'axe constituant l'intersection.**

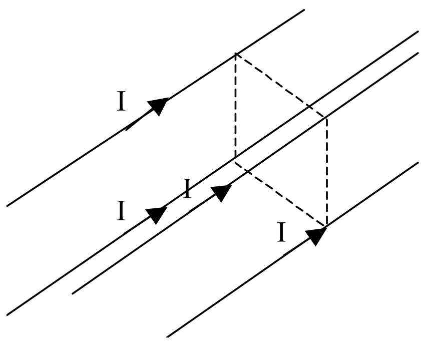
**A l'intersection de plans de symétrie, $\vec{B}$ devant être orthogonal à chacun de ces plans, il s'annulera.**

*exemples :*

1) Spire circulaire




2) 4 fils parcourus par un même courant, disposés parallèlement, aux sommets d'un carré.




### 3.3 Considérations d'invariances :

**(a) Par rotation :** s'il existe un axe autour duquel une rotation d'angle θ quelconque laisse invariante la distribution de courant D, alors la valeur du module B du champ magnétique en un point M ne dépendra de la coordonnée θ correspondante.

**(b) Par translation :** s'il existe une direction selon laquelle toute translation laisse invariante la distribution de courant D, alors la valeur du module B du champ magnétique en un point M ne dépendra de la coordonnée z correspondante.

***Applications :***

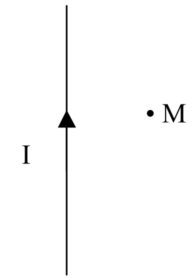
**Champ magnétostatique créé par un « fil infini » (en pratique, par la portion rectiligne et de grande dimension d'un circuit électrique fermé).**

L'étude se fera de façon évidente dans le système de coordonnées cylindriques.
A priori, l'expression du champ est de forme : $\vec{B} = B_r(r,\theta,z)\overrightarrow{e_r} + B_\theta(r,\theta,z)\overrightarrow{e_\theta} + B_z(r,\theta,z)\overrightarrow{e_z}$

*Invariances :*

Par rotation autour de l'axe (Oz) → invariance par rapport à θ
Par translation dans une direction colinéaire à (Oz) → invariance par rapport à z.

donc l'expression du champ se réduit à : $\vec{B} = B_r(r)\overrightarrow{e_r} + B_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta} + B_z(r)\overrightarrow{e_z}$



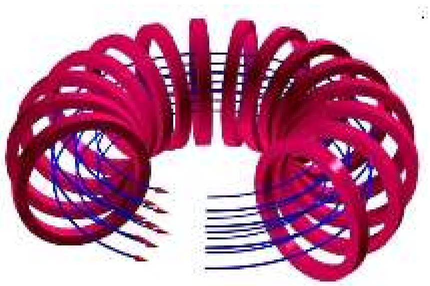

*Symétries :*
En tout point M passe un plan de symétrie (Oz, M) pour le fil. Le champ magnétique devant être orthogonal à ce plan, il sera donc nécessairement orthoradial.

L'expression finale du champ est donc :

$$\vec{B} = B_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$$

On constate qu'une étude géométrique permet de simplifier considérablement l'expression à chercher pour le champ magnétique.

**Champ magnétique créé par une bobine torique.**



En appliquant les propriétés et démarches décrites plus haut, on pourra établir que le champ magnétique créé par un tel dispositif est de la forme :

$$\vec{B} = B_\theta(r,z)\overrightarrow{e_\theta}$$

(activité qui sera menée en classe).

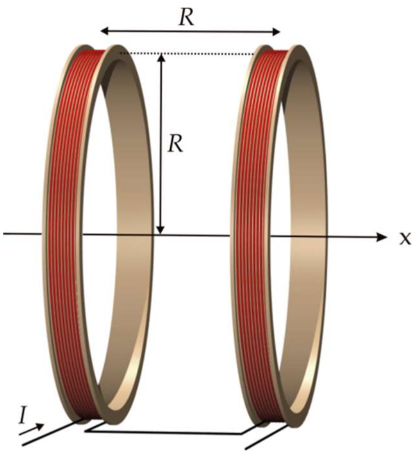
**Illustrations complémentaires.**

**Bobines de Helmoltz :**

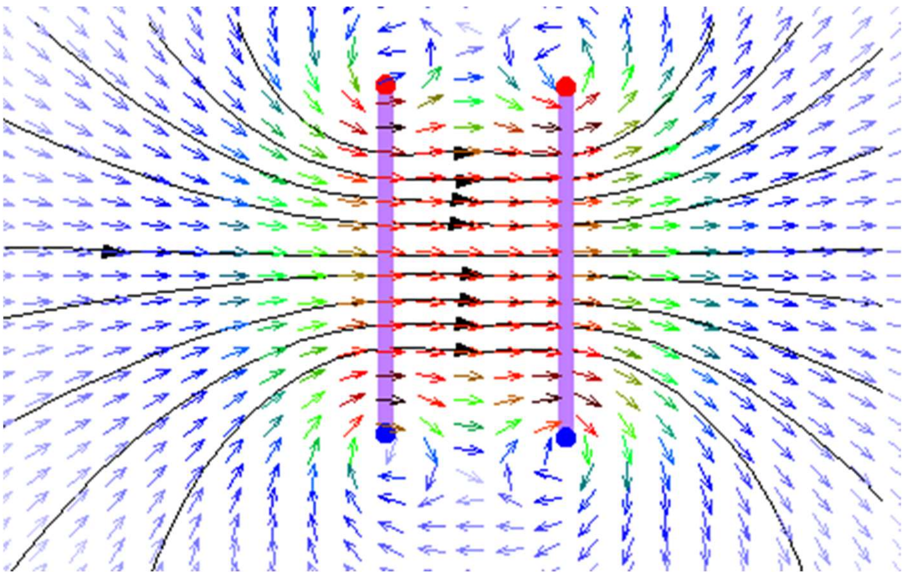
*L'étude de cette situation sera développée après avoir présenté préalablement la notion de flux magnétique, ainsi qu'une propriété fondamentale du champ magnétique : son flux est conservatif.*

Un dispositif particulier permet de réaliser un champ magnétique pratiquement uniforme dans une portion d'espace : les bobines de Helmholtz.

Il s'agit d'un couple de bobines plates, disposées dans des plans parallèles et alimentées électriquement dans le même sens. Ces bobines sont disposées à une distance d de valeur égale à leur rayon R.




Champ produit par les bobines de Helmholtz :



Les lignes de champ apparaissent parallèles entre elles dans la zone situées entre les bobines, ce qui d'après la conservation du flux magnétique, amène un module de champ uniforme sur cette région.

Ce dispositif sera régulièrement employé pour produire un champ magnétique uniforme. L'intensité de ce champ est proportionnelle à l'intensité I circulant dans les deux bobines.

On donne l'expression : $B = \frac{32\ \pi\sqrt{5}}{25}\ 10^{-7}\ \frac{N\,I}{R}$

Ce dispositif donne donc des champs magnétiques de l'ordre de quelques milli-tesla pour des intensités de l'ordre de l'ampère et avec des bobines dont le rayon est de l'ordre de la dizaine de centimètres.