Lois générales dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

L'électrocinétique est l'étude des courants électriques associés aux déplacements d'ensemble de particules chargées. La première partie du cours est centrée sur le cas des circuits linéaires en régime continu ou en régime transitoire. L'approche théorique sera largement complétée par les Travaux Pratiques.

Les lois de base de l'électrocinétique ont été abordées pour l'essentiel en classes de collège. Elles n'ont que très peu été employées au lycée...

1. Intensité d'un courant électrique :

1.1 Porteurs de charges, courant électrique

Nous envisageons ici le cas du courant électrique dans un ***conducteur***. Qu'est-ce que le courant électrique ?
Les matériaux conducteurs comportent des particules chargées électriquement, susceptibles de se déplacer dans le milieu conducteur. On parle de **porteurs de charges** libres.
Selon le conducteur envisagé ces porteurs seront :

- les électrons libres dans un métal,
- les ions en solution dans un électrolyte,
- le cas des porteurs de charges dans un semi-conducteur est plus compliqué. L'introduction de dopants dans le substrat amène la création de sites présentant des excès de charges ou au contraire des déficits de charge (trous). La migration de proche en proche de ces sites explique les propriétés de conduction particulières de ces matériaux, les trous constituants des particules virtuelles transportant des charges.

Tous ces porteurs de charges ont pour propriété commune d'être des particules dont la charge électrique individuelle est quantifiée.
Les électrons portent ainsi une charge élémentaire $q = -e = -1{,}602.10^{-19}$ C ; les ions portent des charges multiples de la charge élémentaire $e = 1{,}602.10^{-19}$ C ...

Dans un conducteur en équilibre électrique, non parcouru par un courant, les porteurs de charge sont animés de mouvements aléatoires chaotiques, dépendant de la température qui règne dans le conducteur. On parle ***d'agitation thermique***. Ces mouvements très intenses (avec des vitesses de l'ordre de 10^5 m.s^{-1} pour les électrons d'un métal à température ambiante) n'ont aucun effet sur le comportement électrique du conducteur à l'échelle macroscopique.

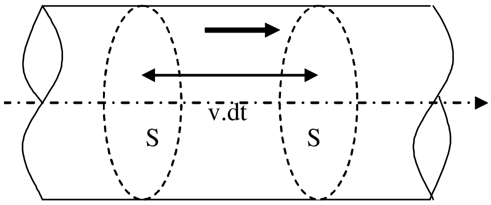
Sous l'action d'une tension électrique appliquée aux extrémités du conducteur (ou différence de potentiel, d.d.p.) ces charges vont acquérir un ***mouvement d'ensemble*** : on aura transport de charge. C'est ce mouvement d'ensemble qui correspondra au courant électrique perçu à l'échelle du conducteur (échelle macroscopique).

Du fait des phénomènes résistifs, la vitesse d'ensemble des porteurs de charge va, de façon quasi immédiate (la durée caractéristique est de l'ordre de 10^{-14} s) atteindre une valeur limite de vitesse v, relativement faible. Cette vitesse v traduit un mouvement d'ensemble qui se superpose au mouvement d'agitation thermique.

Du point de vue de ses conséquences macroscopiques, tout se passe donc comme si les porteurs de charges étaient uniquement animés d'une même vitesse v, puisque c'est ce seul mouvement qui est à l'origine du courant électrique.

Les phénomènes électriques observés macroscopiquement mettront en jeu d'immenses quantités de porteurs de charge, ce qui fait que sauf pour des situations particulières (microélectronique...) la quantification des charges n'aura aucun effet mesurable.

1.2 Intensité d'un courant électrique :



L'intensité I représente le débit de charge à travers une section S donnée d'un conducteur.

Par définition : $\boxed{I = \delta Q / dt}$

où δQ est la charge traversant la section S durant une durée dt, entre deux instants successifs t et t + dt.

Notons : q la charge électrique d'un porteur

n la densité volumique de porteurs (en m^{-3}) ; c'est le nombre de porteurs de charge par unité de volume.

v la vitesse d'ensemble des porteurs (en module) S la section du conducteur

Chaque charge parcourt une distance v.dt pendant une durée infinitésimale dt.

Les charges traversant la section S pendant la durée dt se trouvent contenue à l'instant t dans un cylindre de section S, celle du conducteur, et de longueur v.dt

on en déduit: $\delta Q = n.q.v.S.dt$ On tire finalement : $I = n.q.v.S$

Application Numérique :
Evaluons un ordre de grandeur de v. Soit le cas d'un fil de cuivre, de section 1 mm^2, parcouru par un courant d'intensité I = 1 A. La densité volumique des électrons libre dans le cuivre vaut : $n = 8{,}4\,.10^{28}\ m^{-3}$, et la charge d'un électron : $q = -e = -1{,}6.10^{-19}$ C.
De $v = |I| / (n|q|S)$ on tire numériquement, en norme : $v = 7{,}5.10^{-5}$ m/s ≈ 0,1 mm/s

On constate que l'ordre de grandeur de v (vitesse d'ensemble) n'a rien à voir avec la vitesse moyenne de chaque porteur liée à l'agitation thermique !

Quelques ordres de grandeurs d'intensité :

- 10^{-12} A : courant d'entrée dans un Ampli Opérationnel (composant électronique), dans la base d'un transistor à effet de champ.
- quelques milliampères à quelques dizaines de milliampères dans les circuits électroniques que nous réaliserons en TP,
- quelques ampères à quelques dizaines d'ampères pour les intensités en usage domestique,
- 10^5 A en électrolyse industrielle.

La présentation qui vient d'être faite de l'intensité, en tant que débit de charge, n'a pas pris en compte le ***caractère algébrique*** de l'intensité : on conçoit que l'intensité produite à travers une section d'un conducteur va dépendre du sens de circulation des charges et de leur signe.

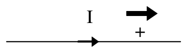
1.3 Orientation d'un conducteur. Définition algébrique de l'intensité :

La mesure de l'intensité d'un courant électrique est obtenue avec un ***ampèremètre***. Remarquons que le ***sens de branchement*** de l'appareil conditionne le signe obtenu pour la mesure.

Ce sens de branchement correspond à une ***définition algébrique de l'intensité*** dans un conducteur.

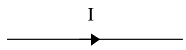
Choisir un sens de branchement de l'ampèremètre revient à définir, arbitrairement une orientation du conducteur.
Ce choix d'orientation est signalé par une flèche sur les schémas.

Ce choix d'orientation étant posé, une valeur positive de l'intensité I correspond à un courant électrique équivalent à un flux de charges positives circulant dans le sens d'orientation du conducteur.

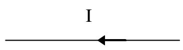


Une valeur négative de l'intensité I correspond à un courant électrique équivalent à un flux de charges positives circulant dans le sens contraire du sens d'orientation du conducteur.

Une même situation électrocinétique, étudiée en posant une orientation



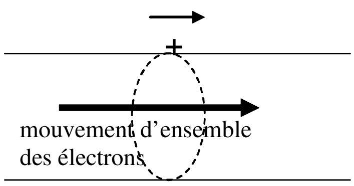
Ou une orientation



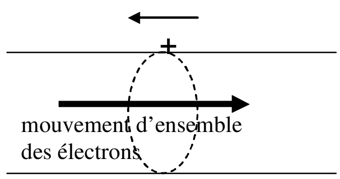
conduira à des valeurs opposées de l'intensité (mesurée à l'ampèremètre ou calculée théoriquement).

Le signe de l'intensité algébrique I dépend donc de l'orientation que l'on aura arbitrairement choisie pour étudier la situation d'un conducteur donné.

Le courant électrique est donc un phénomène de transport de charge, dû à un mouvement d'ensemble de porteurs de charge. Le sens effectif du courant est le sens de déplacement de charges positives qui produiraient ce courant. C'est donc le sens inverse de déplacement des électrons libres qui produisent le courant dans un conducteur métallique, puisque ceux-ci sont de charge négative.



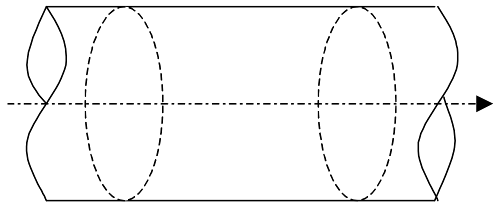
I < 0



I > 0

1.4 Intensité conservative en régime stationnaire :

Le ***régime stationnaire*** ou ***régime permanent*** est un régime où toutes les grandeurs électriques restent indépendantes du temps. Ceci amène notamment à ce que la charge contenue dans une portion de circuit reste invariante. De même, l'intensité à travers une section donnée d'un conducteur sera invariante dans le temps.



Nous allons montrer que dans ces conditions, l'intensité aura même valeur à travers toute section d'un conducteur.

Le morceau de conducteur est délimité par une surface fermée Σ_f correspondant à la surface périphérique du conducteur fermée par deux couvercles
(sections S_e en entrée S_s en sortie, identiques s'il est cylindrique).
On note $i_e(t)$ et $i_s(t)$ les intensités au niveau de ces sections.

Faisons le bilan entre deux instants t et t + dt de la quantité de charges libres situées à l'intérieur de la portion considérée : Q_{int} : à t , $Q_{int} = Q_{int}(t)$.

A t + dt , $Q_{int}(t + dt) = Q_{int}(t) + \delta Q_{entrant} - \delta Q_{sortant}$
où $\delta Q_{entrant}$ est la quantité de charge entrant durant dt

Donc $Q_{int}(t+dt) = Q_{int}(t). + i_e(t).dt - i_s(t).dt$

La loi de conservation des charges et l'invariance temporelle de Q_{int} amène : $Q_{int}(t +dt) = Q_{int}(t)$
Donc :

$$i_e(t) = i_s(t)$$

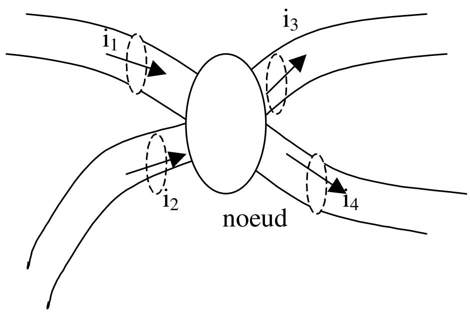
Conclusion : l'intensité d'un courant en régime stationnaire se conserve à travers toute section d'un conducteur. Elle est dite conservative. Ceci revient à dire que l'on aura à tout instant la même intensité tout au long d'une partie non bifurquée d'un circuit (branche).

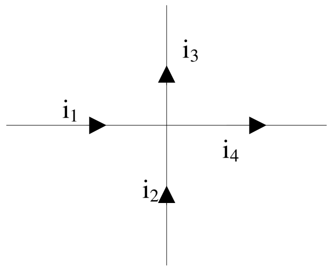
1.5 Loi d'additivité des intensités ou loi des noeuds en régime stationnaire :

L'intensité aura même valeur tout au long d'une portion non bifurquée d'un circuit. Cette affirmation sera valable pour toute branche portant un (ou des) dipôles. Un ***dipôle*** est un composant lié par deux bornes au reste du circuit.

L'intensité entrant et l'intensité sortant d'un dipôle auront donc même valeur : $i_e(t) = i_s(t)$; comme on l'a vu plus haut, cette propriété est due à la loi de conservation de la charge.

L'absence d'accumulation de charges dans les conducteurs ou aux nœuds du réseau électrique (bifurcation, intersection entre branches) justifie la ***loi des nœuds*** :





Bilan de charge sur une durée dt pour le nœud : $\delta Q_e - \delta Q_s = 0 = i_1.dt + i_2 .dt - i_3 .dt - i_4 .dt = 0$

donc : $i_1 + i_2 - i_3 - i_4 = 0$ soit de façon générale : $\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$ avec $\varepsilon_k = +1$ ou -1

Loi des noeuds : la somme **algébrique** des intensités des courants arrivant ou partant en un nœud est nulle. $\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$ avec $\varepsilon_k = +1$ pour une branche orientée vers le noeud et $\varepsilon_k = -1$ pour une branche orientée à l'opposé du noeud.

1.6 L’approximation des régimes quasi stationnaires (ou quasi permanents) (A.R.Q.S. ou A.R.Q.P.)

Considérons le cas d’un régime variable périodique. Le signal électrique (grandeur électrique variant dans le temps), par exemple « état de l’intensité dans le circuit à l’instant t et en l’abscisse x du conducteur » va se propager selon une onde progressive de célérité v.

Dans les circuits métalliques, la vitesse de propagation v de l’information électrique est de l’ordre de la vitesse de la lumière dans le vide ($c = 3.10^8$ m/s).

Nous allons déterminer une ***condition simple*** pour la validation de l'ARQS pour des régimes variables périodiques.

La durée caractéristique des évolutions de l’état électrique du circuit est alors la **période** T du signal électrique.
La durée Δt de propagation de l’onde électrique dans le circuit de longueur L est $\Delta t = L/v$.

La condition de validité de l’ARQS s’écrit alors : $\Delta t << T$

soit en termes de longueur : $v.\Delta t = L << v.T$

L’onde électrique qui se propage dans le circuit est aussi caractérisée par sa longueur d’onde λ, et l’on connaît la relation : $\lambda = v.T$

La condition temporelle $\Delta t << T$ équivaut donc à la condition dimensionnelle $L << \lambda$ portant sur la taille du circuit. La longueur d’onde λ représentant la période spatiale de l'onde électrique, la condition $L << \lambda$ entraîne que l’intensité aura alors même valeur tout au long d’une portion non bifurquée d’un circuit.

A.N. : pour f = 50 Hz (réseau EdF) : $\lambda = c / f = 6000$ km ; $L << \lambda$ est aisément réalisée !
pour f = 1000 Hz (fréquence usuellement utilisée en TP) : $\lambda = c / f = 300$ km ;
pour f = 100 kHz = 10^5 Hz (fréquence maximale utilisée en TP) : $\lambda = c / f = 3$ km ;

l’ARQS sera donc valide dans toutes les situations que nous étudierons.
Conclusions :

Dans l’ARQS, on va supposer que la durée de propagation Δt du signal dans le circuit est négligeable devant la durée caractéristique de fonctionnement du circuit.

Si l’ARQS est valide, l’intensité aura même valeur tout au long d’une portion non bifurquée d’un circuit.

Corrélativement, l'intensité aura même valeur à l'entrée et à la sortie d'un dipôle.

Dans ces conditions, les lois de l'électrocinétique en régime permanent seront encore valables en régime variable.

Dans l’ARQS, à un instant t donné l’intensité aura même valeur tout au long d’une portion non bifurquée d’un circuit portant un (ou des) dipôles. L’intensité entrant et l’intensité sortant d’un dipôle aura donc même valeur : $i_e(t) = i_s(t)$ à tout instant t. La ***loi des nœuds*** sera valable en régime variable dans l'ARQS.

1.7 Tension ou différence de potentiel (d.d.p). Loi des mailles :

La notion de potentiel électrique et de différence de potentiel sera abordée ici par analogie.

Lorsque nous posons la main sur un radiateur, la chaleur ressentie correspond à un flux d'énergie du corps chaud vers le corps froid. On montre que ce flux est régi par la différence de température ΔT entre les deux corps $\Delta T = (T_{radiateur} - T_{main})$.
Le flux énergétique est d'autant plus intense que cette différence ΔT est forte ; son sens dépend du signe.

Risquons une seconde analogie, en gardant conscience de ses limites. Un cours d'eau s 'écoule par gravitation ; c'est l'existence d'une dénivellation, d'une diminution de l'altitude z, qui permet à une masse m de fluide de s'écouler. En fait, on relie ce phénomène à une diminution de l'énergie potentielle de pesanteur $Ep = mgz + cste$ dans l'écoulement. Une part de l'énergie potentielle perdue se transforme en énergie cinétique (mouvement), l'autre se dissipe du fait des frottements.

En électricité, l'énergie potentielle d'une charge q, placée dans un environnement électrique donné, est proportionnelle à q selon :

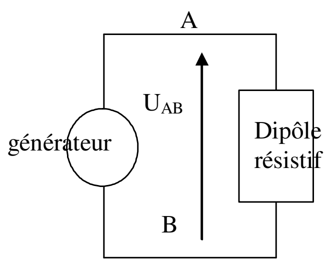
$$Ep = q.V + ctse$$

où V est le potentiel électrique existant en la position de la charge.
(V est défini à une constante près).

De façon analogue à un écoulement gravitaire, dans un conducteur ohmique (répondant à la loi d'Ohm), une charge q va évoluer spontanément dans le sens d'une diminution de son énergie potentielle.

Pour $q > 0$, cela se traduit par un mouvement dans le sens d'une diminution de son potentiel V.

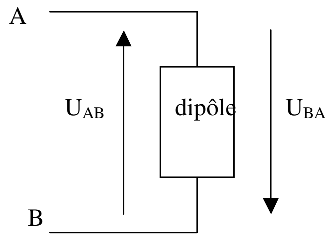
La présence d'un ***générateur*** dans un circuit, apportant de l'énergie au système, permettra une augmentation de l'énergie potentielle des charges.



Ce générateur est donc l'analogue d'une pompe dans un circuit hydraulique, qui permettrait de monter un fluide en altitude.

La différence de potentiel apparaît comme le « moteur » du courant électrique.

On nomme tension ou d.d.p. la différence de potentiel existant entre deux points d'un circuit. La représentation conventionnelle se fait par une flèche qui oriente la définition de la tension.



$$U_{AB} = V_A - V_B$$

La tension U_{AB} est désignée par une flèche qui se lit de la pointe à la base.

Ainsi, pour une tension positive, la flèche pointe vers le point de potentiel le plus élevé.

La tension U_{AB} est algébrique ; si $U_{AB} < 0$, c'est que $V_A < V_B$.

Attention à l'orientation : $U_{BA} = - U_{AB}$

Cette algébrisation s'observe lors de la ***mesure d'une tension par un voltmètre*** : selon son sens de branchement, la valeur mesurée sera positive ou négative.

Le potentiel électrique V étant défini à une constante près, seule la d.d.p. (différence de potentiel) a une valeur numérique ayant une signification physique.

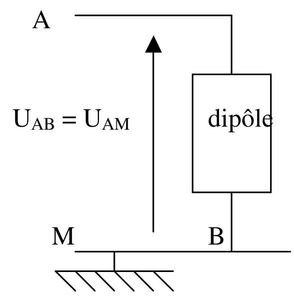
Quelques ordres de grandeurs de tensions :

- Tension de seuil d'une LED (tension à partir de laquelle elle s'allume) : 0,65 V.
- Tension à vide d'une batterie de voiture : 12 V
- Tension efficace du secteur 220V, soit en valeur crête : $220.\sqrt{2} = 311$ V
- Haute tension pour le transport de l'électricité dans les lignes de distribution ≈ 10 kV à 100 kV

Masse, référence de potentiel :

Très usuellement, on va décider conventionnellement d'une valeur de potentiel en un point d'un circuit : on définit ainsi une ***masse*** dans un circuit, faisant ***référence de potentiel***, dont on fixe arbitrairement la valeur de potentiel à 0 V.

(Au même titre, on peut décider conventionnellement d'une altitude 0…).



$U_{AB} = V_A - V_B$ avec $V_B = V_M$.

En fixant conventionnellement : $V_M = 0$ il vient : $U_{AB} = V_A$.

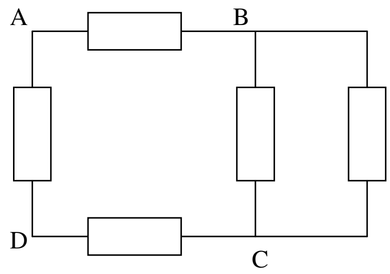
<u>Loi d'additivité des tensions ou Loi des mailles :</u>

Une maille est un ensemble de branches successives définissant un circuit fermé dans un réseau électrique, qui ne passe qu'une seule fois par les nœuds rencontrés.

loi des mailles : la somme algébrique des tensions décomptée en parcourant une maille est nulle.

Corollaire : la somme algébrique des tensions décomptées d'un nœud d'un réseau à un autre est indépendante du chemin suivi.

Justification :



Sur la maille ABCDA :
$U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA} = V_A - V_B + V_B - V_C + V_C - V_D + V_D - V_A = 0$

Par le chemin BAD : $U_{BA} + U_{AD} = V_B - V_A + V_A - V_D = U_{BD}$

mais aussi par le chemin BCD : $U_{BD} = U_{BC} + U_{CD} = V_B - V_C + V_C - V_D$

Nous illustrerons ces énoncés sur des exemples. On sera particulièrement attentif à l'orientation des tensions.

Propriétés importantes :

- La ***permutation*** des dipôles au sein d'une même branche ne modifie pas le réseau : la branche sera parcourue par la même intensité, l'additivité des tensions amène une même tension pour l'ensemble de la branche.

- les fils de liaison sont en général de résistance négligeable par rapport aux autres dipôles et n présentent donc pas de tension entre leurs bornes. Deux points liés par un fil seront donc au ***même potentiel***. Ils pourront être confondus en un même point sur un schéma électrique.

- Pour la même raison, deux points se trouvant au même potentiel peuvent être reliés par un fil sans modifier le comportement du circuit.

Ces trois propriétés permettent de réaménager les schémas électriques pour plus de lisibilité. (voir exemples).

Conclusion :

L'ensemble loi des nœuds et loi des mailles constitue les ***lois de Kirchoff***.
Ces lois permettent la mise en équation des circuits électriques.

Tout circuit électrique constitué de B branches et de N nœuds sera décrit par un système d'équations comportant N-1 équations de nœud et B-N+1 équations de branches.

L'ensemble présente B inconnues (les courants dans les différentes branches), reliées aux tensions par les lois décrivant le comportement des différents dipôles du circuit.

La résolution de ce système de (N-1) + (B – N +1) = B équations à B inconnues est mathématiquement possible.

Néanmoins, au delà des cas simples avec peu de branches, l'emploi de méthodes plus évoluées permettra de réduire la technicité mathématique, au profit de modélisations physiques.

Le programme de Sup PCSI préconise une limitation à des circuits à faible nombre de mailles. Ces circuits pourront donc être complètement étudiés en posant correctement les lois de Kirchoff (lois de mailles et lois de noeud) et en simplifiant les schémas électriques quand cela sera possible (association de dipôles en dipôles équivalents etc.).