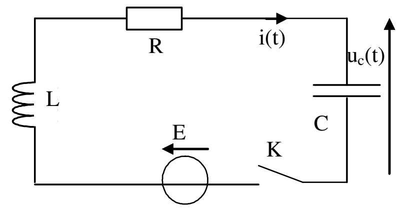
RLC série en réponse indicielle : résolution analytique, étude numérique et bilan énergétique.

Un circuit RLC série est soumis à un échelon de tension, au moyen du montage ci-contre.



On donne : L = 125 mH ; C = 1,0 nF ; R est réglable.
E= 4,0 V.

a) Etablir l'équation du circuit et déterminer les conditions initiales sur u(t) et sur sa dérivée temporelle.

b) Déterminer sans calcul les valeurs finales de u(t) et de sa dérivée.

c) Tracer une allure de u(t).

d) Etablir un bilan énergétique sur l'ensemble du processus.

e) Déterminer analytiquement l'expression de la tension u(t) compte tenu des conditions initiales du circuit, que l'on mettra sous la forme :

$$u(t) = E + A.exp\left(\frac{-\omega_o.t}{2Q}\right).cos\left(\omega_o t.\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} + \varphi\right)$$

en explicitant A et φ en fonction de E, ω_o , Q et ω.

f) Justifier que pour Q suffisamment grand on a : $\omega \approx \omega_o$; $A \approx E$ et $\varphi \approx 0$.

g) Réaliser un tracé à la calculatrice de u(t) pour Q = 3 et Q = 10.

h) Pour Q = 10, déterminer au moyen du graphique précédent la valeur numérique de l'instant t_o à partir duquel la réponse u(t) vaudra E à 10% près.

Réponses :

a) Mise en équation de la réponse indicielle du circuit RLC série.

$L\dfrac{di}{dt} + R.i(t) + u_c(t) = e(t)$ avec ici e(t) = E pour t > 0

Etudions sommairement la réponse $u_C(t)$ obtenue à la fermeture de l'interrupteur K, le condensateur étant supposé initialement déchargé :

Les conditions de continuité impliquent :

- la continuité en t = 0 de la tension sur le condensateur :
  $u_C(0_-) = 0 = u_C(0_+)$;

- la continuité de l'intensité traversant la bobine :
  $i(0_-) = 0 = i(0_+)$, avec $i(t) = C.du_c/dt$ donc $du_c/dt(0_+) = 0$.

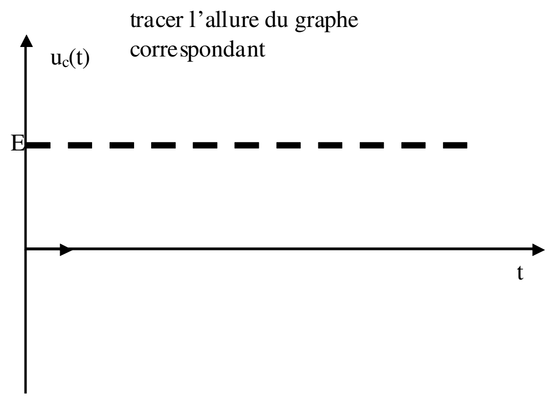
b) Pour t → ∞ le condensateur tendra vers une charge constante, donc $i(\infty) \to 0$, et donc $du/dt(\infty) \to 0$. On obtient donc $u_c(\infty) \to E$.

c) Une étude analytique confirmerait ces résultats avec pour solution : $u_c(t) = u_{cSPEC} + u_{cSGESSM}(t)$.

Le terme $u_{cSGESSM}$ correspond à la solution de régime libre dont les formes ont été établies en 4.3 du cours ;
le terme u_{cSPEC} est constant et vaut E.

$u_c(t) = E + u_{cSGESSM}(t)$.

L'allure de la solution va dépendre des caractéristiques du circuit qui fixent la valeur de son facteur de qualité.
On aura selon le cas un régime apériodique, critique ou pseudo-périodique.



d) bilan énergétique.

Procédons maintenant au bilan énergétique :
De même que précédemment, l'équation du circuit est :

$$L\frac{di}{dt} + R.i(t) + u_c(t) = E$$

en multipliant chaque terme de tension par l'intensité i(t), il vient l'équation en puissances :

$$L\frac{di}{dt}i(t) + R.i^2(t) + u_c(t)i(t) = Ei(t)$$

L'énergie contenue dans la bobine est $\frac{1}{2}Li^2$ et celle dans le condensateur est $\frac{1}{2}Cu^2$
Le bilan énergétique peut s'écrire directement :

$\Delta E_{mag} + \Delta E_{élec} = -W_{joule} + W_{gén}$

où : ΔE_{mag} est la variation d'énergie magnétique sur le processus :

$$\Delta Emag = \frac{1}{2}Li(\infty)^2 - \frac{1}{2}Li(0)^2$$

et $\Delta E_{élec}$ est la variation d'énergie magnétique sur le processus :

$$\Delta Eélec = \frac{1}{2}Cu(\infty)^2 - \frac{1}{2}Cu(0)^2$$

$W_{gén}$ est l'énergie fournie par le générateur : $Wgén = \int_0^\infty E.i(t)dt = \int_{q(0)}^{q(\infty)} E.dq(t) = CE^2$
W_{joule} est l'énergie dissipée par le effet Joule dans le résistor.

On constate que la moitié de l'énergie fournie par le générateur aura été dissipée dans le résistor ; l'autre moitié se sera accumulée dans le condensateur ; en début et en fin de processus, la quantité d'énergie magnétique contenue dans la bobine sera nulle.

Remarque :
Le bilan entre les instants t = 0 et t → ∞ peut se calculer un peu plus formellement, en partant de l'équation du circuit :

$$L\frac{di}{dt}+R.i(t)+u_c(t)=e(t)$$ avec ici e(t) = E pour t > 0

que l'on multiplie par i(t) et que l'on intègre dans le temps :

$$\int_0^\infty L\frac{di}{dt}i(t)dt+\int_0^\infty R.i^2(t)dt+\int_0^\infty u_c(t)C\frac{du_c}{dt}dt=\int_0^\infty EC\frac{du_c}{dt}dt$$

soit : $\int_0^0 Li(t)di+\int_0^\infty R.i^2(t)dt+\int_0^E Cu_c(t)du_c=\int_0^E ECdu_c$

d'où finalement : $0+\int_0^\infty R.i^2(t)dt+\frac{1}{2}CE^2=CE^2$

e) La solution analytique est :

$$u(t)=E+A.exp\left(\frac{-\omega_o.t}{2Q}\right).cos\left(\omega_o t.\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}+\varphi\right)$$

Q est un paramètre a-dimensionné.

Une étude analytique analogue à celle faite en cours donne, en tenant compte des conditions initiales :

$\tan\varphi = -\omega_o/(2Q\omega)$ et $A = -E/\cos\varphi$

f) Dans des conditions de valeurs suffisantes de Q, on aura :

$$\omega = \omega_o.\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \approx \omega_o$$

$\tan\varphi \approx 0$ et donc $\varphi \approx 0$
et par conséquent : $A = -E/\cos\varphi \approx -E$

$$u(t)=E-E.exp\left(\frac{-\omega_o.t}{2Q}\right).cos(\omega_o t)$$

g) Tracé pour différentes valeurs typiques par simulation au moyen de la calculatrice graphique :

Q = 3 ; Q = 10.

Nous choisissons une variable a-dimensionnée : $x = \omega_o t$
On exécute le tracé de :

$$y(x)=u(t)/E=1-1.exp\left(\frac{-x}{2Q}\right).cos(x)$$

h) En traçant u(t) à la calculatrice, déterminer l'instant t_o au-delà duquel u(t) restera à moins de 10% d'écart de E, la valeur finale.
On donne L = 125 mH et C = 1,0 nF.

Pour Q = 10 **on obtient ainsi graphiquement : x = 41,4**

d'où : $t_o = x/\omega_o = x.(LC)^{1/2} = 4{,}63.10^{-4}$ s.