Introduction à la mécanique quantique - CORRIGES

1. Nombre de photons :

a) Flux solaire moyen : ϕ = 0,5 kW.m^{-2} ; pour chaque photon solaire, de longueur d'onde moyenne λ = 0,5 µm l'énergie transportée est E = hν =h.(c/λ).
L'énergie reçue sur une surface S = 1 m^2 durant Δt = 0,1 s sera $\phi.\Delta t$.
Le nombre de photons est donc le rapport ($\phi.\Delta t$)/E. A.N. : 1,3.10^{20} photons.

b) Flux solaire moyen : ϕ_o = 0,5 kW.m^{-2} , pour une magnitude m_o = -26,8. Pour l'étoile, on cherche son flux stellaire ϕ_e avec un écart de magnitude $m - m_o = 2{,}5.\log(\phi_e/\phi_o)$
ce qui amène :

$$\phi = \phi_o.10^{\frac{-m+m_o}{2,5}} = 2{,}4.10^{-11} W.m^{-2}$$

Le flux lumineux entrant dans la pupille sera : $\phi.\pi D^2/4$ avec D= 7.10^{-3} m.
L'énergie reçue durant Δt = 0,1 s sera : $\phi\Delta t.\pi D^2/4$
ce qui correspond à un nombre de photons :

$$\frac{(\phi.\Delta t)\frac{\pi D^2}{4}}{\frac{hc}{\lambda}} = 230\, photons$$

2. Etude d'une cellule photoélectrique au potassium.

1) Travail d'extraction du potassium, pour un électron : W_o = 2,25 eV. Chaque photon transporte l'énergie E = hν soit E = hc/λ.
Pour λ = 490 nm ; E = 4,05.10^{-19} J = 2,53 eV (1 eV = 1,602.10^{-19} J).
Pour λ = 660 nm ; E = 3,01.10^{-19} J = 1,88 eV.
Il faut E > W_o pour que l'extraction soit possible, ce qui s'obtient donc seulement pour λ = 490 nm.

2) Bilan énergétique : le photon communique l'ensemble de son énergie qui se partage en le travail d'extraction et une énergie cinétique communiquée à l'électron.
$E = h.\nu = hc/\lambda = W_o + E_c$
Donc $E_c = E - W_o$ = 0,28 eV = 4,48.10^{-20} J.
Si l'on suppose l'électron non relativiste : $E_c = mv^2/2$ ce qui amène :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 3{,}14.10^5 m/s$$

ce qui confirme son caractère non relativiste (v << c= 2,98.10^8 m/s).
I = 4,0.10^{-8} A correspond à une quantité de charge électrique par unité de temps. Comme chaque électron transporte la charge électrique élémentaire e , l'intensité I correspond à un nombre d'électrons par unité de temps N = I/e = 2,5.10^{11} électrons par seconde.
La puissance lumineuse émise est P = 9,0.10^{-7} W pour des photons d'énergie E = 4,05.10^{-19} J.
Le flux de photons incidents est N_i = P/E = 2,2.10^{12} photons par seconde.
D'où le rendement quantique : $\rho = N/N_i$ = 0,113 = 11,3 %

3. Microscopie électronique.

a) Pour des détails de taille a < λ, le phénomène de diffraction rend l'image inexploitable.
Dans le visible 400 nm < λ < 800 nm. Il faut donc a > λ, soit dans le visible des détails de dimension supérieur au micromètre (en ordre de grandeur).
b) E_c = 100 eV =1,602.10^{-17} J (1 eV = 1,602.10^{-19} J)
Si l'on suppose l'électron non relativiste : $E_c = mv^2/2$ ce qui amène :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 5{,}9.10^6 m/s$$

ce qui confirme l'aspect non relativiste de cette particule.
La relation de De Broglie donne $\lambda = h/p = h/(mv) = 1{,}23.10^{-10}$ m ≈ 0,1 nm.

Même démarche, par la mécanique classique, qui donnerait $E_c = mv^2/2$ ce qui amène :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = 1{,}8.10^8 m.s^{-1} = 0{,}6.c$$

Cette fois la particule est relativiste.

Dans ces conditions, l'expression classique de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

n'est plus valide, mais doit être remplacée par l'expression relativiste :

$$E_c = (\gamma - 1)mc^2$$

où :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ce qui donne ici : $\gamma = 1 + (E_c/mc^2) = 1{,}20$ et donc :

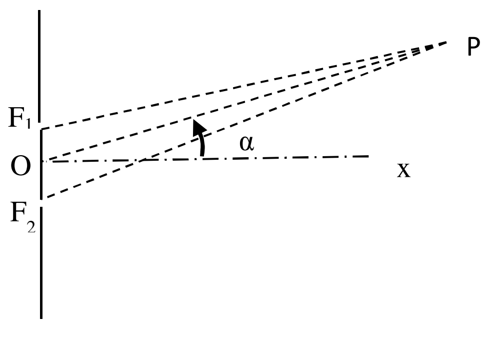
$$v = c.\sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 1{,}66.10^8\ m/s$$

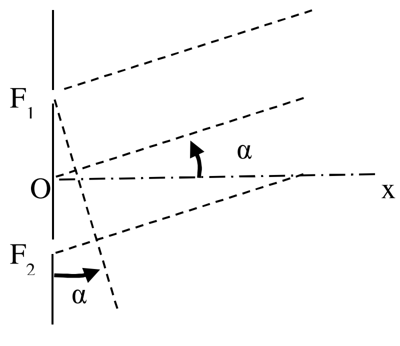
Alors $p = \gamma mv$ et $\lambda = h/p = h/(\gamma mv) = 3{,}7$ pm.

4. Expérience des fentes de Young avec des particules matérielles :

a) La différence de marche (d.d.m.) δ perçue en le point P, entre les ondes issues des fentes F_1 et F_2 est : $\delta = F_2P - F_1P$.

La distance d entre les deux fentes étant très inférieure à la distance D entre le système de fentes et l'écran récepteur, les segments $[F_1P]$, $[OP]$ et $[F_2P]$ sont pratiquement parallèles, c'est à dire qu'ils forment pratiquement le même angle α avec la direction horizontale (Ox).





$\delta = F_2H$ où H est le projeté orthogonal de F_1 sur (F_2P) ; vue la construction $\delta = d.\sin\alpha$
et comme le point P est relativement proche de l'axe (Ox) : $\alpha \approx \tan\alpha = y/D$
d'où finalement : $\delta = dy/D$.

L'interfrange i correspond à une variation Δy de l'ordonnée y du point P amenant une variation de 1 unité de l'ordre d'interférence δ/λ, c'est à dire à une variation de une longueur d'onde de la d.d.m. δ : $\Delta y = \lambda D/d = i$.

La vitesse des électrons est déterminée par le bilan énergétique de leur accélération sous la tension U : $E_c = e.U$, ce qui amène :

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 3{,}24.10^7 m/s$$

On est à la limite relativiste.
En conservant les expressions classiques : p = mv donne par la relation de De Broglie λ = h/p= $2{,}25.10^{-11}$ m d'où un interfrange i = 22,5 µm.
b) p = m.<v> donne λ = h/p = $1{,}66.10^{-8}$ m et un interfrange i = λD/d = 0,31 mm.
c) La vitesse est de l'ordre de la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique donnée par la relation :

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

soit ici : v = 630 $m.s^{-1}$. D'où λ = h/(mv) = $3{,}3.10^{-11}$ m valeur inférieure à la taille des atomes. Des expériences demandant la diffraction à travers de telles ouvertures ne sont pas réalisables.

d) La vitesse maximale acceptable impose d'avoir une température T < $m\langle v\rangle^2/(3k)$ soit T < 1,2 mK. Donc des atomes ultra froids. (Refroidissement par Laser…).

5. Expérience de G.P. Thomson.
a) On observe un phénomène de diffraction, analogue à celui obtenu pour les rayons X, qui s'interprète par une approche ondulatoire.
b) $\lambda_X \approx 0{,}1$ nm (taille des atomes).
E_c = eU avec en mécanique classique $E_c = mv^2/2$ qui donne

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 1{,}9.10^7 m.s^{-1} < 0{,}1\,c$$

La vitesse v est suffisamment faible devant c = $2{,}98.10^8$ m/s pour que le résultat classique soit acceptable.

Par la relation de De Broglie : λ = h/p = h/(mv) qui amène :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2em}\sqrt{U}} \approx \frac{1{,}23}{\sqrt{U}}$$

donnant λ en nanomètres. Ainsi pour U = 600 V on obtient λ = 50 pm = 0,050 nm.

6. Cyanines.
a) La fonction d'onde ψ est reliée à la densité de probabilité de présence de la particule p(M, t) = $|\psi|^2$. ψ doit donc s'annuler aux extrémités du domaine. Par analogie avec le cas d'une corde vibrante (corde de Melde), les longueurs d'onde possibles répondent à : $L = n\lambda_n/2$ où λ_n est la longueur d'onde quantifiée pour le mode propre de rang n ; soit donc : $\lambda_n = 2L/n$.
Par la relation de De Broglie, $\lambda_n = h/p$ amène : $p = h/\lambda_n = n.h/(2L)$.

Les valeurs d'énergie E_n pour les modes propres de rang n, dans un puits infini où l'énergie potentielle est nulle, se limitent à la valeur d'énergie cinétique.
Il vient par conséquent : $E_n = E_{cn} = p^2/(2m)$ soit finalement :

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$$

b) Il ya 10 intervalles entre atomes (11 atomes mis en jeu, 9 carbones et les deux atomes d'azote placés en bout de chaîne), auxquels s 'ajoutent deux demi-longueur de liaison.
Donc : L = (10 + 2.1/2).d = 11.d = 1,54 nm.

n = 1 donne E_1 = 0,16 eV ; n = 2 donne E_2 = 0,63 eV ; n = 3 donne E_3 = 1,4 eV
n = 4 donne E_4 = 2,5 eV ; n = 5 donne E_5 = 3,9 eV ; n = 6 donne E_6 = 5,7 eV ; n = 7 donne E_7 = 7,7 eV

c) 5 doubles liaisons plus un doublet libre : 12 électrons.
d) La plus basse énergie de transition est l'excitation du niveau 6 au niveau 7 (à l'état fondamental, l'énergie globale devant être minimale, et les électrons ne pouvant pas se trouver dans le même état, ces derniers se sont répartis sur les six premiers niveaux, avec deux électrons par niveau, de spins opposés).
$\Delta E = E_7 - E_6$ = 2,0 eV = $3{,}2.10^{-19}$ J.
$\Delta E = h\nu = hc/\lambda$ amène pour le photon absorbé par cette transition $\lambda = hc/\Delta E$= 620 nm.
Cette valeur correspond à une radiation visible, située dans le rouge orangé, soit une couleur apparente (par synthèse soustractive) bleu-vert (ou bleu canard).
e) En reprenant la même démarche, on aura pour 7 atomes de carbones, donc une chaîne plus courte : L = 1,3 nm avec 10 électrons.
Transition entre les niveaux 5 et 6 : ΔE = 2,5 eV, qui conduit de même à une longueur d'onde d'absorption λ = 497 nm (jaune). Le colorant donne cette fois la couleur complémentaire rouge.
Remarque : une mesure expérimentale donnerait en fait λ = 520 nm au lieu des 497 nm obtenus par cette théorie assez simplifiée...
Pour 11 atomes de carbones, toujours par la même démarche : L = 1,8 nm avec 14 électrons.
Transition entre les niveaux 7 et 8 : ΔE = 1,7 eV, qui conduit de même à une longueur d'onde d'absorption λ = 770 nm (rouge). Le colorant donne cette fois la couleur complémentaire verte. Les valeurs obtenues sont cette fois en accord avec les mesures expérimentales.

7. Dimensions de l'atome d'hydrogène.

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o a}$$

a) Inégalité de Heisenberg : $\Delta x.\Delta p_x > \hbar/2$
Or ici a, rayon de l'atome d'hydrogène, est un ordre de grandeur maximal pour la valeur de l'indétermination Δx.
Par ailleurs, l'énergie cinétique de l'électron, supposé non relativiste, s'écrit $E_c = p^2/2m$. Admettons que l'on puisse confondre p^2 et p_x^2 (la relation d'indétermination a été écrite sur une seule dimension).
Par l'expression de l'écart quadratique moyen :

$$\Delta {p_x}^2 = \langle {p_x}^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 \leq \langle {p_x}^2 \rangle$$

amène en moyenne :

$$\langle E_c \rangle = \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \geq \frac{\Delta p_x^2}{2m}$$

soit

$$\langle E_c \rangle \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2}$$

Cette dernière valeur constitue une valeur minimale pour l'énergie cinétique de l'électron ; pour une valeur donnée d'énergie E, l'énergie potentielle sera alors maximale, soit avec une énergie potentielle de forme U(r) = $-e^2/(4\pi\varepsilon_o r)$ et avec un domaine sur r limité entre r = 0 et r = a, une valeur maximale de U(r) en r = a, soit U(a)= $-e^2/(4\pi\varepsilon_o a)$.

Il vient donc, pour une valeur de a donnée :

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o a}$$

b) On cherche maintenant la valeur de a qui va minimiser l'énergie totale E, vue en tant que fonction de a. On annule la dérivée de E(a) par rapport à a :

$$\frac{dE(a)}{da} = -\frac{\hbar^2}{ma^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o a^2} = 0$$

de solution a = a_{min}= $4\pi\varepsilon_o\hbar^2/(me^2)$=5,29.$10^{-11}$ m. Cette valeur correspond au rayon de Bohr.

c) $E(a_{min}) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2e^4}{(4\pi\varepsilon_o)^2\hbar^4} + \frac{-e^2.me^2}{(4\pi\varepsilon_o)^2\hbar^2} = \frac{-me^4}{2(4\pi\varepsilon_o)^2\hbar^2}$

soit numériquement : E(a_{min}) = -2,1.10^{-18} J = -13 eV.

La valeur expérimentale est E = -13,6 eV.

d) Modèle classique : un électron, vu comme une particule ponctuelle, tourne autour d'un proton à une distance r. Son énergie est alors :

$$E = \frac{-e^2}{8\pi\varepsilon_o r}$$

A mesure que l'énergie est dissipée par rayonnement électromagnétique E(r) décroît, et donc le rayon r de la trajectoire décroît de même. Comme le phénomène est très rapide, l'électron devrait s'écraser sur le proton au bout de quelques millionièmes de seconde. L'atome d'hydrogène serait très instable selon ce modèle !
C'est l'inégalité d'indétermination de Heisenberg qui amène le fait que l'énergie cinétique augmente si la taille a caractérisant le domaine de probabilité d'existence de la particule diminue, ce qui permet d'atteindre un niveau minimal d'énergie totale E, stable, pour une valeur a_{min} non nulle.

8. Diffusion Compton

a) Par la relation de Heisenberg, $\Delta x.\Delta p_x > \hbar/2$.

En terme de relation en dimensions, on a donc : $[\Delta x] > [\hbar/2]/[\Delta p_x]$.
D'après la relation de De Broglie, λ = h/p, le rapport de h à une quantité de mouvement est une longueur.
Ces deux relations de référence permettent d'affirmer que le facteur h/mc a la dimension d'une longueur.

b) h/(mc) = 2.10^{-12} m donc la variation de longueur d'onde λ' - λ est de l'ordre du picomètre. Elle sera perceptible à condition que la variation relative (λ' - λ)/λ ne soit pas trop faible, donc pour des longueurs d'onde suffisamment faibles.
c) La longueur d'onde du photon incident augmente, donc son énergie E = hc/λ diminue. La différence d'énergie aura été communiquée à l'électron sous forme d'énergie cinétique.
d) θ = 90°, cosθ = 0 donc par la formule donnée : λ' – λ = h/mc
soit : λ' = λ + h/mc = 7,32.10^{-11} m.
e) (-ΔE) = (hc/λ) – (hc/λ') = 9,2.10^{-17} J ≈ 600 eV. L'énergie d'ionisation de l'électron étant de l'ordre de la dizaine d'électron-volt, cet apport d'énergie encaissé par l'électron va l'arracher de l'atome. La quantité d'énergie cinétique résiduelle sera telle qu'il sera relativiste.