

Statique des fluides

1. Evolution de la pression dans un fluide :

On envisage un océan, supposé en équilibre isotherme. La masse volumique de l'eau varie avec la pression selon la loi : $\rho = \rho_0[1 + a(P - P^0)]$ où $a = 1,0 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.

La profondeur est notée z , pour $z = 0$, $P = P^0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $\rho = \rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

1°) Donner la loi $P(z)$.

2°) Que devient cette loi pour des profondeurs faibles ?

3°) Calculer les valeurs de pression exactes et approchées pour $z = 1,0 \text{ km}$. Quelle est l'erreur relative commise en utilisant l'expression approchée du 2°) ?

Réponse : 1°) $P = P^0 + 1/a (\exp(a\rho_0gz) - 1)$; 2°) $P = P^0 + \rho_0gz$, ce qui revient à considérer $\rho = \text{cste}$;

3°) $\Delta P/P = 0,050 \%$.

2. Modèles d'atmosphère.

La troposphère est la partie de l'atmosphère où nous vivons, et dans laquelle des échanges notables de masse d'air ont lieu. L'air de la troposphère est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29,0 \text{ g.mol}^{-1}$. On suppose que dans cette région le champ de pesanteur est uniforme, de module $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

On note respectivement T_0 et P_0 la température et la pression régnant au sol, à l'altitude $z = 0$.

$P_0 = 1,01 \text{ bar}$ et $T_0 = 307 \text{ K}$ (conditions estivales).

a. On suppose que la température est uniforme dans toute la troposphère. Etablir alors l'expression de la pression $P(z)$ en fonction de l'altitude. On introduira une grandeur H caractéristique de l'évolution de la pression avec l'altitude que l'on explicitera en fonction de T_0 , M , g et $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$. Calculer numériquement H .

b. On suppose maintenant que la température de l'air décroît linéairement avec l'altitude selon la loi $T(z) = T_0 - \lambda.z$ avec $\lambda > 0$, à raison de $6,0^\circ\text{C}$ tous les 1000 mètres de dénivellée.

Montrer que la loi $P(z)$ prend alors la forme :

$$P(z) = P_0 \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z\right)^{\frac{T_0}{\lambda H}}$$



Calculer dans ce modèle la pression atmosphérique et la température au sommet de l'Everest (altitude $z = 8850 \text{ m}$).

c. Pour $z \ll H$, montrer que les deux modèles précédents conduisent à une même fonction affine $P(z)$ reliant la pression à l'altitude. Evaluer pression et température au sommet du Mont Afrique, fier sommet de la périphérie dijonnaise (altitude $z = 566 \text{ m}$).

Réponse : a) $P = P_0 \cdot \exp(-z/H)$ où $H = RT_0/(Mg) = 8,97 \cdot 10^3 \text{ m}$; b) A partir de la LFSF, l'équation différentielle sur P est :

$$\frac{dP}{P} = \frac{T_0}{\lambda H} d \ln \left(1 - \frac{\lambda z}{T_0}\right)$$

Conditions sommitales : $P_s = 0,34 \text{ bar}$ et $T_s = 255 \text{ K} = -18^\circ\text{C}$.

c) Par un D.L. au premier ordre en z/H (cas (a)) ou en $\lambda z/T_0$ (cas (b)) : $P \approx P_0 \cdot (1 - z/H)$

Conditions sommitales : $P_s = 0,94 \text{ bar}$ et $T_s = 304 \text{ K} = 31^\circ\text{C}$.

3. Equilibre dans un tube en U :

Un tube en U de section constante $s = 1,0 \text{ cm}^2$, ouvert aux deux extrémités, contient de l'eau.

1°) On ajoute dans l'une des branches un volume $V = 6,0 \text{ cm}^3$ d'huile de masse volumique $\rho_h = 0,90 \text{ g.cm}^{-3}$. Déterminer la dénivellation Δh_1 entre la surface libre de l'eau et la surface de séparation eau-huile.

2°) A partir de l'état d'équilibre précédent, on ajoute dans l'autre branche du tube en U un volume $V' = 10 \text{ cm}^3$ d'acétone, de masse volumique $\rho_a = 0,79 \text{ g.cm}^{-3}$.

Déterminer la dénivellation Δh_2 entre les deux interfaces eau-huile et eau-acétone, ainsi que la dénivellation Δh_3 entre les deux surfaces libres.

*Réponse : Faire des schémas. Calculer les hauteurs des colonnes d'huile et acétone mises en jeu. Ecrire la relation de la statique des fluides, et l'explicitier pour ces fluides incompressibles, en utilisant le fait que des points de mêmes altitudes z , situés dans un même fluide, sont à la même pression (intéressant notamment **au niveau des interfaces** où l'on a **continuité de la pression**).*

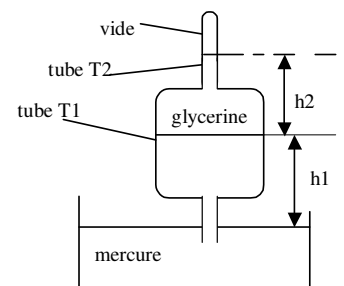
$\Delta h_1 = 5,4 \text{ cm}$; $\Delta h_2 = 2,5 \text{ cm}$; $\Delta h_3 = 1,5 \text{ cm}$.

4. Baromètre différentiel à deux liquides :

Les sections respectives S_0 , S_1 et S_2 de la cuve de mercure, du tube T_1 et du tube T_2 cylindriques respectent les proportions : $S_0/S_1 = 10$ et $S_1/S_2 = 20$.

Le mercure, de masse volumique $\rho_1 = 13,6 \text{ kg/l}$ et la glycérine de masse volumique $\rho_2 = 1,1 \text{ kg/l}$ ont leur surface de séparation dans le tube T_1 .

On donne $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. La pression au dessus de la glycérine est pratiquement nulle (tension de vapeur de la glycérine très faible).



1°) La pression atmosphérique est P° , et les dénivellations des deux liquides sont h_1 et h_2 . Etablir la relation entre P° , h_1 et h_2 à l'équilibre.

2°) Quand la pression atmosphérique augmente légèrement de P° à $P^\circ + \Delta P$, la surface libre de la glycérine monte de la quantité z . Donner ΔP en fonction de ρ_1 , ρ_2 , S_2/S_1 , S_1/S_0 , g et z .

3°) Calculer ΔP en millibar pour $z = 30 \text{ mm}$. En déduire en mm/millibar la sensibilité de ce baromètre différentiel ainsi que son pouvoir amplificateur B par rapport au baromètre de Torricelli (baromètre à mercure).

Réponse : 1°) $P^\circ = g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)$; 2°) $\Delta P = gz[\rho_1 ((S_2/S_1)(S_1/S_0) + S_2/S_1) + \rho_2(1 - S_2/S_1)]$

$\Delta P = 5,27 \text{ mbar}$; 3°) $5,68 \text{ mm/mbar}$ pour le baromètre différentiel et $0,75 \text{ mm/mbar}$ pour le baromètre de Torricelli, donc $B = 7,6$.

5. Masse de l'atmosphère terrestre.

Evaluer numériquement la masse totale M_{At} de l'atmosphère terrestre. On envisagera l'atmosphère comme formée uniquement d'air (on néglige la masse d'eau sous forme vapeur et en suspension sous forme liquide). Comparer à la masse totale du globe terrestre $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Données : rayon terrestre $R_T = 6370 \text{ km}$; constante des gaz parfaits $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; température moyenne de l'atmosphère terrestre 288 K ; champ de pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$; masse molaire de l'air $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.

Réponse : $M_{At} \approx 5,2 \cdot 10^{18} \text{ kg}$; M_{At} est environ 1 million de fois plus faible que M_T .

6. Théorème d'Archimède. Corps partiellement immergé :

Un glaçon de forme cylindrique flotte à la surface de l'eau contenue dans un verre.

1°) En analysant les forces pressantes exercées par l'eau sur ce corps solide, retrouver le résultat du théorème d'Archimède dans cette situation. On notera ρ_e la masse volumique de l'eau, R le rayon du glaçon, h sa hauteur et a sa hauteur à l'air libre.

2°) Connaissant les masses volumiques de l'eau $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$ et de la glace $\rho_g = 920 \text{ kg/m}^3$, déterminer le rapport a/h .

3°) Quelle force doit on exercer verticalement avec l'extrémité d'une paille pour maintenir le glaçon à la lisière de la surface de l'eau ? Doit on appuyer encore plus fort pour l'enfoncer complètement dans l'eau ?

Réponse : 1°) voir cours ; 2°) $a/h = 1 - \rho_g/\rho_e = 0,08$; 3°) $F = (\rho_e - \rho_g)\pi R^2 a g$; $F = 7400 \text{ N}$. Non, si l'on néglige l'évolution de ρ_e avec la profondeur.

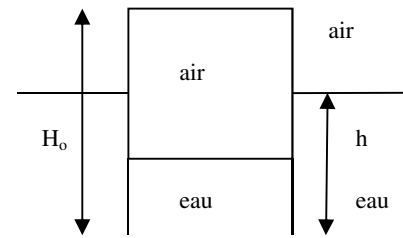
7. Cloche à air :

1. Une cloche de plongée cylindrique de masse m , dont l'épaisseur des parois est négligeable, est plongée verticalement dans l'eau. On désigne respectivement par S et H_0 la section et la hauteur du cylindre, par μ la masse volumique de l'eau et par P_0 la pression atmosphérique extérieure.

La cloche s'enfonce dans le liquide en emprisonnant un volume d'air initial égal à son volume intérieur. La répartition de la masse de la cloche est telle que dans son état d'équilibre, elle flotte verticalement.

La température est uniforme et constante dans tout le problème. On négligera la masse volumique de l'air devant celle de l'eau. La pression de l'air est considérée comme uniforme à l'intérieur du récipient. L'air est assimilé à un gaz parfait.

Exprimer la pression P_1 de l'air emprisonné dans la cloche, son volume V_1 et la hauteur h de la partie immergée du récipient.



2. Une vanne située dans la partie supérieure de la cloche permet d'évacuer une quantité d'air suffisante pour que la cloche s'enfonce jusqu'à ce que la base du cylindre affleure juste la surface de l'eau. Calculer la pression P_2 et le volume V_2 de l'air dans la cloche.

3. La cloche vide est maintenant déposée à l'envers sur l'eau et est remplie d'un liquide de masse volumique $\mu_o < \mu$. Quel est le volume maximal V_M de liquide que l'on peut mettre dans la cloche avant qu'elle ne coule ?

Réponse : 1. $P_1 = P_0 + mg/S$; $V_1 = P_0 H_0 S^2 / (P_0 S + mg)$; $h = mg H_0 / (P_0 S + mg) + m / (\mu S)$.

2. $P_2 = P_0 + mg/S$; $V_2 = m/\rho$; 3. $V_M = (1/\mu_o) \cdot (\mu H_0 S - m)$.

8. Oscillations d'un bouchon cylindrique :

Un bouchon cylindrique de hauteur h et de rayon R est déposé à la surface de l'eau contenue dans un récipient. 1°) Il flotte en restant enfoncé pour une moitié de son volume dans l'eau. En déduire la masse volumique μ_m du matériau (mousse synthétique) qui le constitue.

2°) En lui donnant une légère impulsion vers le bas, le bouchon se met à osciller à la surface de l'eau avec une faible amplitude. Calculer la période de ces oscillations.

Données : masse volumique de l'eau : $\mu_e = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$; $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$; $R = 1,0 \text{ cm}$.

Réponse : 1°) $\mu_m = \mu_e/2$; 2°) Pour un enfoncement de z , le volume d'eau déplacé s'accroît de $2Rh \cdot z$; l'étude mécanique amène une équation d'oscillateur harmonique. La pulsation propre vaut :

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu_e g}{\pi R \mu_m}}$$

9. Plafond d'altitude pour un ballon sonde :

Un ballon sonde est gonflé à l'hélium. La masse correspondant à l'enveloppe du ballon et aux instruments de mesure qu'il transporte est $m = 10 \text{ kg}$. La température au sol est $T_0 = 290 \text{ K}$, la pression au sol vaut $P_0 = 1,0 \text{ bar}$. On considère qu'à chaque instant la température et la pression du gaz situé à l'intérieur du ballon sont égales à celles de l'air atmosphérique.

1°) Evaluer le volume minimal V_0 nécessaire à l'envol du ballon. La température au sol est $T_0 = 288 \text{ K}$ et la pression vaut $1,01 \text{ bar}$.

2°) La température de l'atmosphère décroît avec z selon $T(z) = T_0 \cdot (1 - \alpha z)$ avec $\alpha = 2,08 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ et la pression atmosphérique évolue en fonction de l'altitude selon : $P(z) = P_0 \cdot (1 - \alpha z)^\beta$ où $\beta = 5,35$. Comment évolue le volume du ballon à mesure qu'il s'élève ? On suppose que le volume au décollage est $V_d = 10 \text{ m}^3$. Evaluer le volume à une altitude $z = 10 \text{ km}$.

3°) En fait, le volume du ballon est bien sûr limité à une valeur V_{max} . Montrer qu'il existe une altitude plafond z_{max} au-delà de laquelle le ballon ne montera pas. Calculer z_{max} pour $V_{\text{max}} = 30 \text{ m}^3$.

Données : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M_{\text{He}} = 4,0 \text{ g.mol}^{-1}$; $M_{\text{air}} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$; $T_0 = 288 \text{ K}$; $P_0 = 1,01 \text{ bar}$.

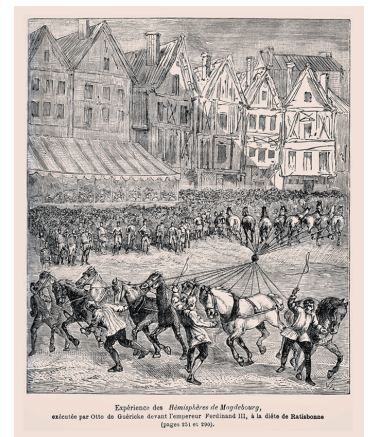
Réponses : 1°) La poussée d'Archimède doit compenser le poids de l'ensemble du ballon. $V_0 = 9,4 \text{ m}^3$;
 2°) $V(z) = V_d \cdot (1 - \alpha z)^{1-\beta}$; $V(z = 10 \text{ km}) = 27 \text{ m}^3$; 3°) $z_{\text{max}} = 11,2 \text{ km}$.

10. Hémisphères de Magdebourg.

Cette expérience a permis de démontrer l'action de la pression atmosphérique. Deux hémisphères creux d'environ soixante centimètres de diamètre furent assemblés pour former une sphère ; un des hémisphères était muni d'un tube fermé par une valve. Le tube était relié à une pompe à vide inventée par Otto von Guericke. L'air contenu dans la sphère put être pompé créant un vide. La différence de pression entre l'extérieur et l'intérieur des hémisphères les maintenait ensemble fermement : deux attelages de chevaux n'ont pu séparer les hémisphères tant que le vide a été maintenu.

Evaluer numériquement la force à exercer pour séparer les deux hémisphères dans les conditions de l'expérience.
 (rayon des sphères $R = 28 \text{ cm}$, pression atmosphérique $P_0 = 1,0 \text{ bar}$).

Réponse : $F = 2,5 \cdot 10^4 \text{ N}$

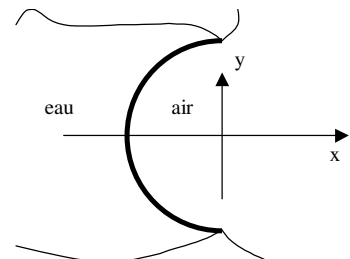


Le 6 mai 1654, Otto von Guericke, bourgmestre de Magdebourg, présente l'expérience devant l'empereur Ferdinand III, à la ville de Ratisbonne.

11. Effort supporté par un barrage-voûte :



Un barrage hémicylindrique (c'est à dire dont la vue en plan est demi-circulaire) de rayon R est rempli d'eau sur une hauteur h . On note μ la masse volumique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur.



Calculer la résultante des forces de pression exercées par l'air et l'eau sur le barrage.

Application numériques : $R = 100 \text{ m}$; $h = 100 \text{ m}$; $\mu = 1,0 \text{ kg.L}^{-1}$; $g = 9,8 \text{ m/s}$.

Réponse : Par une intégration vectorielle des participations de chaque surface élémentaire $d\vec{F} = Pd\vec{S}$ où $P = P(z) - P_0$ avec $P(z) = P_0 + \mu gz$: $F = \mu g R h^2$.