Statique des fluides (Corrigés).

1. Evolution de la pression dans un fluide :

1°) La loi fondamentale de la statique des fluides amène : $dP/dz = \rho g$. Attention, z est dans le sens de la profondeur, donc $dP/dz > 0$. Il faut intégrer cette équation en tenant compte du fait que ρ dépend de P (masse volumique non uniforme).

$dP/dz = \rho_o g[1+a(P - P°)]$ donne en séparant les variables : $\frac{dP}{1+a(P-P°)} = \rho_o g dz$ qui s'intègre en : $\frac{1}{a} Ln\left[1+a(P-P°)\right] = \rho_o gz$ compte tenu de la condition limite : à z = 0, P = P°.

D'où : $P = P° + 1/a\ (\exp(a\rho_o gz)-1)$

2°) Pour z faible, on peut faire un D.L. à l'ordre 1 sur l'exponentielle : $\exp(a\rho_o gz) \approx 1 + a\rho_o gz$

donc $P = P° + \rho_o gz$, ce qui revient à considérer $\rho = \rho_o = cste$;

3°) Application numérique : $\Delta P/P = 0{,}05\ \%$.

2. Modèles d'atmosphère.

a) La Loi fondamentale de la statique des fluides donne

$dP/dz = -\rho g$ où ρ est la masse volumique du fluide. Ici, le fluide est compressible.

Par le modèle du Gaz Parfait : $\rho = PM/RT$ où $T = T_o = cste$.

Par intégration : $P = P_o.\exp(-z/H)$ où $H = RT_o/(Mg) = 8{,}97.10^3$ m ;

b) A partir de la LFSF, $dP/dz = -\rho g$ où $\rho = PM/RT$ mais avec $T = T(z)$ variable.

l'équation différentielle sur P est cette fois, en séparant les variables :

$$\frac{dP}{P} = \frac{T_o}{\lambda H} d\ln(1 - \frac{\lambda z}{T_o})$$

Par intégration on trouve en effet :

$$P(z) = P_o \left(1 - \frac{\lambda}{T_o} z\right)^{\frac{T_o}{\lambda H}}$$

Conditions sommitales sur l'Everest : $P_s = 0{,}34$ bar et $T_s = 255$ K = -18°C.

c) Par un D.L. au premier ordre en z/H (cas (a)) ou en $\lambda z/T_o$ (cas (b) : $P \approx P_o.(1 - z/H)$

Conditions sommitales sur le Mont Affrique : $P_s = 0{,}94$ bar et $T_s = 304$ K = 31°C.

3. Equilibre dans un tube en U :

1°) En les points A et A' situés respectivement aux interfaces air/huile et air/eau, on aura même pression, P_{atm} la pression atmosphérique.

En B, interface huile/eau : $P_B = P_{atm} + \rho_h.gh_1$ où $h_1$est la hauteur de la colonne d'huile.

Considérons le point C, situé à la même cote que B mais dans l'autre branche du tube en U. C étant situé à une dénivellation h_2 sous la surface de l'eau : $P_C = P_{atm} + \rho_e.g.\Delta h_1$, où Δh_1 est la dénivellation entre la surface libre de l'eau (point A') et l'interface huile / eau (point B).

Il vient : $\rho_h.h_1 = \rho_e \Delta h_1$

$h_1 = V/s$ est connu. Donc on tire : $\Delta h_1 = (\rho_h / \rho_e) V/s$.

La dénivellation Δh entre les deux surfaces libres sera $\Delta h = h_1 - \Delta h_1$ soit $\Delta h = h_1(1 - (\rho_h/\rho_e))$.

2°) Faire un schéma du problème (indispensable !). On note h_3 la hauteur de colonne d'acétone ajoutée sur l'eau. Δh_2 est la dénivellation entre l'interface huile/eau et l'interface acétone/eau.

Δh_3 étant l'écart de niveau entre les deux surfaces libres, sur les deux branches du tube en U :

$h_1 + \Delta h_3 = h_3 + \Delta h_2$

En écrivant l'évolution linéaire de la pression dans les fluides incompressibles :

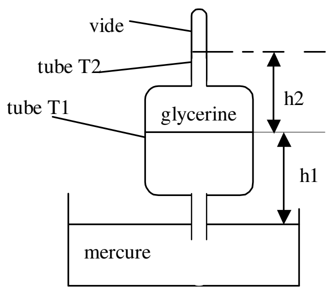
$P_B = P_{atm} + \rho_h.g.h_1$ et $P_C = P_B = P_{atm} + \rho_{ac}.g.h_3 + \rho_e.g.\Delta h_2$

On tire donc : $\rho_h.h_1 = \rho_{ac}.h_3 + \rho_e.\Delta h_2$ avec $h_1 = V/s$ et $h_3 = V'/s$

D'où : $\Delta h_2 = \frac{1}{\rho_e}\left(\frac{V}{s}\rho_h - \frac{V'}{s}\rho_{ac}\right)$ et $\Delta h_3 = \left(\frac{V'}{s} - \frac{V}{s}\right) + \Delta h_2$

AN : $\Delta h_1 = 5{,}4$ cm ; $\Delta h_2 = 2{,}5$ cm ; $\Delta h_3 = 1{,}5$ cm.

4. Baromètre différentiel à deux liquides :



1°) Dans les fluides incompressibles (comme la glycérine et le mercure), la pression va augmenter linéairement avec la profondeur.

En A, placé à l'interface glycérine/vide $P_A = P_{sat}(glyc.) \approx 0$. En B, à l'interface glycérine/mercure : $P_B = P_A + \rho_2 gh_2$. En C, de même cote que D, situé à l'interface mercure/air, $P_D = P_C$ avec $P_C = P_B + \rho_1 gh_1$ et $P_D = P°$.

On tire : $P° = g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)$

2°) On aura un déplacement z de l'interface glycérine/vide. Le tracé d'un schéma clair est indispensable pour comprendre la suite…

La conservation du volume de la glycérine implique d'avoir un déplacement Δz_1 de l'interface glycérine/mercure, avec $z.S_2 = \Delta z_1.S_1$.

La conservation du volume du mercure implique d'avoir un déplacement Δz_o de l'interface mercure/air (vers le haut !), avec $\Delta z_1.S_1 = \Delta z_o.S_o$.

Exprimons les pressions par la même démarche qu'en 1°) : $P_A = P_{sat}(glyc.) \approx 0$.

En B, à l'interface glycérine/mercure : $P_B = P_A + \rho_2 g(h_2+z - \Delta z_1)$.

En C, de même cote que D, situé à l'interface mercure/air, $P_D = P_C$

avec $P_C = P_B + \rho_1 g(h_1 + \Delta z_1 + \Delta z_o)$ et $P_D = P° + \Delta P$.

On déduit alors : $\Delta P = gz[\rho_1 ((S_2/S_1)(S_1/S_o) + S_2/S_1) + \rho_2(1 - S_2/S_1)]$ AN : $\Delta P = 5{,}27$ mbar ;

3°) $\sigma = 5{,}68$ mm/mbar pour le baromètre différentiel et $\sigma' = 0{,}75$ mm/mbar pour le baromètre de Torricelli, donc $B = \sigma/\sigma' = 7{,}6$.
Il y a un effet amplificateur.

5. Masse de l'atmosphère terrestre.

Plusieurs possibilités pour formuler la réponse.

1ère méthode :

En utilisant le modèle de l'atmosphère isotherme, vue en cours : on considère l'atmosphère comme en équilibre statique, avec une température uniforme T = 288 K, et un champ de pesanteur uniforme $g = 9{,}8 m.s^{-2}$

La Loi fondamentale de la statique des fluides donne

$dP/dz = -\rho g$ où ρ est la masse volumique du fluide. Ici, le fluide est compressible.

Par le modèle du Gaz Parfait : $\rho = PM/RT$ où $T = T_o$ = cste.

Par intégration : $P = P_o.\exp(-z/H)$ où $H = R.T_o/(M_{air}\, g) = 8{,}97.10^3$ m avec $R = 8{,}314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$;

Dans une couche située entre les altitudes z et z + dz, de rayon $R_T + z$, d'épaisseur dz et donc de volume

$dV = 4\pi.(R_T + z)^2.dz$, on aura une masse d'air $dm = M_{air}.P(z).dV/(R.T_o)$.

Comme z va en fait varier sur un intervalle $[0, z_{max}]$ avec $z_{max} << R_T$ on pourra considérer que $R_T + z \approx R_T$.

En sommant ces masses dm, il vient :

$$M_{At} \approx \frac{1}{RT_o} M_{air}.4\pi R_T{}^2.\int_{z=0}^{z_{max}} e^{-z/H}\, dz$$

Ce qui conduit à :

$$M_{At} = \frac{P_o 4\pi R_T{}^2}{g}$$

2ème méthode :

En exploitant la LFSF : $dP/dz = -\rho g$ où ρ est la masse volumique du fluide. Ici, le fluide est compressible, donc ρ évolue avec les conditions de pression et température, elles-mêmes dépendant de l'altitude.

Pour une colonne verticale de section S partant du sol, on peut écrire pour chaque tranche d'épaisseur dz et située à l'altitude z : $S.dP = -\rho gS.dz$

La quantité $\rho gS.dz = dm$ représente le poids de la masse d'atmosphère située dans cette tranche.

Chaque colonne d'atmosphère de section S apporte une masse

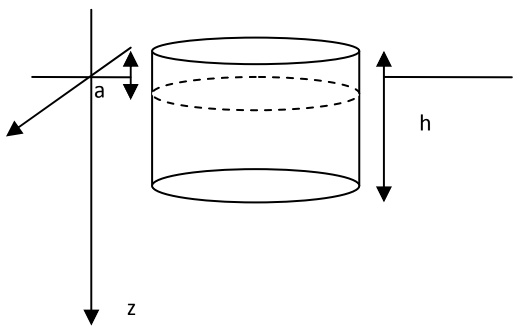
$$m_S = \int_{P = Po}^{0} -\frac{S}{g}dP = \frac{P_oS}{g}$$

La surface totale de la Terre étant $S_{tot} = 4\pi R_T^2$ on accède à

$$M_{At} = \frac{P_o 4\pi {R_T}^2}{g}$$

$M_{At} \approx 5{,}2.10^{18}$ kg ; M_{At} est environ 1 million de fois plus faible que M_T.

6. théorème d'Archimède. Corps partiellement immergé :



1°) La poussée d'Archimède est la résultante des forces pressantes agissant sur le solide immergé. La surface latérale du cylindre étant verticale, les forces pressantes qui s'y appliquent seront de direction horizontale. La pression étant identique en tout point de même profondeur dans le fluide, les forces pressantes exercées sur la surface latérale vont se compenser.

Seules les composantes verticales correspondant aux forces pressantes s'exerçant sur la face supérieure et la face inférieure du solide sont à prendre en compte :

$$\overrightarrow{\Pi_A} = \pi R^2 P(z=-a)\overrightarrow{e_z} - \pi R^2 P(z=h-a)\overrightarrow{e_z}$$

pour z = -a , P = P° (dans l'air) pour z = h – a, dans l'eau $P(z) = P° + \rho_e gz$

D'où : $\overrightarrow{\Pi_A} = -\pi R^2 \rho_e g(h-a)\overrightarrow{e_z} = -m_{déplacé}\overrightarrow{g}$

car la masse de fluide déplacé (on néglige la masse d'air) vaut : $\rho_e . \pi R^2(h-a)$, le volume de glace immergé étant $\pi R^2(h-a)$.

2°) Equilibre du glaçon quand la poussée d'Archimède compense son poids :

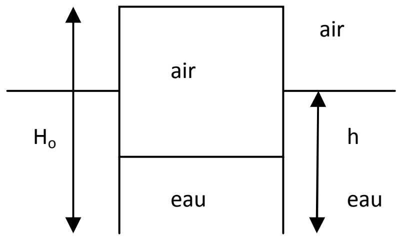
$\overrightarrow{\Pi_A} + m_{glace}\overrightarrow{g} = -\pi R^2 \rho_e g(h-a)\overrightarrow{e_z} + \rho_{gl}\pi R^2 h\overrightarrow{g}$ d'où : $a/h = 1 - \rho g/\rho_e = 0{,}08$;

3°) La force supplémentaire à imposer pour enfoncer le glaçon complètement dans l'eau correspond au poids du fluide supplémentaire à déplacer $\overrightarrow{F} = \rho_e \pi R^2 a\overrightarrow{e_z}$; elle ne change pas si l'on veut enfoncer le glaçon plus profondément, si l'on néglige l'évolution de ρ_e avec la profondeur. En effet, quelque soit sa position dans l'eau, la poussée d'Archimède restera identique. Néanmoins le déplacement du glaçon vers une plus forte profondeur nécessitera de faire travailler cette force, c'est-à-dire que cela demandera une dépense énergétique de la part de l'opérateur.

7. Cloche à air :

1. La cloche, de masse m est en équilibre ; la somme des forces qui lui est appliquée est nulle ; en projection sur la verticale descendante (Oz) : $mg + P_o.S – P_1.S = 0$ d'où $P_1 = P_o + mg/S$;

Transformation isotherme : PV = Cste donc pour l'air dans la cloche $P_1.V_1 = P_oH_o.S$ avec P_1 donné par la question précédente d'où $V_1 = P_oH_oS^2/(P_oS + mg)$;

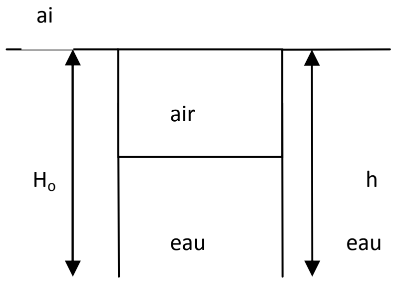


D'après la LFSF écrite pour un fluide incompressible de masse volumique μ :

$P(z) = P_o + \mu gz$ à la profondeur z dans l'eau.

Soit au niveau de la surface de l'eau à l'intérieur de la cloche :
$P_1 = P_o + \mu g(H_o – h)$

D'où finalement : $h = mgH_o /(P_oS + mg) + m/(\mu S)$.



2. L'équilibre de la cloche implique en projection sur la verticale descendante (Oz) : $mg + P_o.S – P_2.S = 0$ avec cette fois P_2 pression régnant dans la cloche dans ces conditions. Soit $P_2 = P_o + mg/S$;
   Le volume d'air est alors $V_2 = S.z_2$ où $P(z_2) = P_o + \mu g.z_2$ soit donc
   $P_2 = = P_o + \mu g.V_2 /S$. D'où finalement $V_2 = m/\mu$
3. La poussée d'Archimède (de module égale au poids du fluide déplacé) doit compenser le poids de la cloche.
   Donc : $mg + \mu_o.V_M g- \mu.H_oS.g = 0$; d'où $V_M = (1/\mu_o).(\mu H_oS – m)$.

8. Oscillations d'un bouchon cylindrique :

1°) le poids doit être compensé par la poussée d'Archimède : $\mu_m.V.g - \mu_e.g.V/2 = 0$

d'où $\mu_m = \mu_e/2$;

2°) Pour un enfoncement de z, le volume d'eau déplacé s'accroît de 2Rh.z ;

Pour un enfoncement z, le volume de fluide déplacé est : (V/2) + 2Rh.z

L'étude mécanique, par la RFD amène une équation d'oscillateur harmonique :

$\mu_m.V .d^2z/dt^2 = \mu_m.V.g - \mu_e.g.((V/2) + 2Rh.z)$ donc :

$$\ddot{z} + \frac{2Rh.\mu_e}{\mu_{m.V}} z = 0$$

avec $V = \pi.R^2h$

La pulsation propre vaut :

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu_e g}{\pi R\mu_m}}$$

La période est $T = 2\pi/\omega$. AN : T = 0,18 s.

9. Plafond d'altitude pour un ballon sonde :

1°) La poussée d'Archimède doit compenser le poids de l'ensemble du ballon.

La RFD s'écrit :

$$mg + \frac{P_o M_{He}}{RT_o} V g - \frac{P_o M_{air}}{RT_o} V = m_{tot}.\ddot{z}$$

où m_{tot} est la masse des parties solides du ballon (enveloppe, accessoires,...) et du gaz qu'il contient (de l'hélium).

La valeur V_o est la valeur de V minimale pour avoir $\ddot{z} > 0$; d'où $V_o = (RT_o/P_o)m/(M_{air} - M_{He})$.

AN : Vo = 9,4 m^3 ;

2°) $V(z) = V_d.(1 - \alpha z)^{1-\beta}$; V(z = 10 km) = 27 m^3 ;

3°) L'altitude plafond correspond à l'annulation de la force ascensionnelle pour $V = V_{max}$ soit donc z solution de :

$$mg + \frac{P(z) M_{He}}{RT(z)} V_{max} g - \frac{P(z) M_{air}}{RT(z)} V_{max} = 0$$

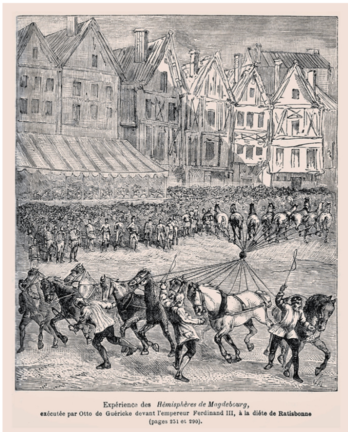
avec $P(z)/T(z) = (1 - \alpha z)^{\beta-1}.(P_o/T_o)$.

Après calculs :

$$z_{max} = \frac{-1}{\alpha}\left(\left(\frac{RT_o m}{P_o V_{max}(M_{air-M_{He}}}\right) - 1\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$$

AN : z_{max} = 11,2 km.

10. Hémisphères de Magdebourg.



Le 6 mai 1654, Otto von Guericke,

bourgmestre de Magdebourg,

présente l'expérience devant

Chaque élément de surface dS d'un hémisphère subit une force pressante radiale d'intensité P_o.dS.

On va procéder par une intégration vectorielle des participations de chaque surface élémentaire, en faisant leur projection sur la direction qui portera la résultante des forces, l'axe de symétrie (Oz) des deux hémisphères.

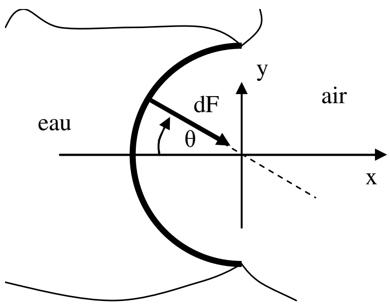
L'expression en coordonnées sphériques donne :

$dF_z = P_o.\ R^2\sin(\theta).d\theta.d\phi.\cos(\theta)$ avec $\sin\theta.\cos\theta = \sin(2\theta)/2$

En intégrant pour ϕ variant sur [0 ; 2π] et θ sur [0 ; π/2] on tire

$F_z = \pi R^2.P_o$

Ce résultat peut être retrouvé de façon plus intuitive : $F_z = P_o.S_o$ où S_o est la surface projetée de la demi-sphère sur un plan orthogonal à son axe (Oz). AN : $F_z = 2{,}5.10^4$ N.



11. Effort supporté par un barrage-voûte :

On va procéder par une intégration vectorielle des participations de chaque surface élémentaire. Chaque élément de surface dS de la paroi du barrage va subir une force pressante $\overrightarrow{dF} = P(z)\overrightarrow{dS}$ qui lui est normale.

La pression dans l'eau varie selon : P(z) = P° + µgz (fluide incompressible) en considérant z = 0 à la surface de l'eau et en orientant l'axe (Oz) vers le bas.

La pression dans l'air est P° en tout point. Les forces pressantes imposées sur dS par l'eau et par l'air sont de sens opposé.

Donc chaque élément de surface va subir : $\overrightarrow{dF} = \mu g z \overrightarrow{dS}$

La sommation des éléments de force doit être vectorielle. On va donc projeter ces éléments sur une base afin de sommer séparément les différentes composantes.

Pour chaque élément : $\overrightarrow{dF} = \mu g z dS \cos\theta \overrightarrow{e_x} + (-\mu g z dS \sin\theta)\overrightarrow{e_y}$

où dS est l'élément de surface cylindrique : dS = Rdθ.dz

La sommation se fera entre θ = -π/2 et θ = +π/2, et sur z entre 0 et h.

Les composantes selon (Oy) vont se compenser et mener à une somme nulle, ce qui était prévisible vue la symétrie du problème.

Le calcul donne après intégration sur θ et z :

$$\iint \overrightarrow{dF} = R.\int_0^h \mu g z dz.\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta d\theta.\overrightarrow{e_x} + R.\int_0^h \mu g z dz.\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} -\sin\theta d\theta.\overrightarrow{e_y} = \mu g R h^2 \overrightarrow{e_x}$$