

## Gaz Parfaits

### 1. Masse d'air dans une pièce :

1°) la masse  $m$  d'air répond à  $m = \rho \cdot V$ . La masse volumique  $\rho$  de l'air dépendra des conditions de température et de pression.  $n$  l'exprime à partir de l'équation d'état :  $PV = nRT$ .

$\rho$  est la masse par unité de volume, donc la masse de  $n$  mole divisée par le volume correspondant :  $\rho =$

$$\frac{nM}{V} = \frac{nM}{nRT \frac{1}{P}} = \frac{PM}{RT}$$

D'où finalement :  $m = \frac{PMV}{RT}$  où  $V = S \cdot h$  AN :  $m = 75$  kg

2°) On modifie les valeurs de  $P$  et  $T$  et l'on obtient :  $m' = 70$  kg.

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{m' - m}{m} = -0,067 \text{ soit } -6,7 \%$$

### 2. Gonflage d'un pneu à l'aide d'air comprimé :

a) Système = { air contenu dans le pneu }

En roulant le pneu s'est échauffé : sa température a augmenté. La quantité d'air est la même à l'état initial et à l'état final.

EI :  $P = 2,1$  bar ;  $t = 20^\circ\text{C}$  soit  $T = 293$  K ;  $V = V_i$

EF :  $P = 2,3$  bar ;  $t = t'$  soit  $T = T'$  ;  $V = V_i$  (pneu non déformé).

Par l'équation d'état :  $n = \frac{PV}{RT} = \frac{P_i V_i}{RT} = \frac{P_f V_i}{RT'}$  d'où  $T' = T \cdot (P'/P)$

AN :  $T' = 321$  K soit  $48^\circ\text{C}$ .

b) Système = { air initialement contenu dans la bouteille }.

On fait une détente isotherme ( $T = \text{cste}$ ) pour ce système fermé ( $n = \text{cste}$ ).

EI :  $V = V_b = 60,0$  L =  $0,0600$  m<sup>3</sup> ;  $P_b = 15,0$  bar

EF :  $V_f$  ;  $P_f = 1,00$  bar.

$$V_f = P_b \cdot V_b / P_f = 900 \text{ L.}$$

Le volume extrait est donc  $V_b - V_f = 840$  L puisqu'en fin de processus il restera 60 L d'air dans la bouteille, sous la pression de 1,00 bar.

c) Faisons un bilan des moles d'air.

Air contenu initialement dans la bouteille.  $V = V_b = 60,0$  L =  $0,0600$  m<sup>3</sup> ;  $P_b = 15,0$  bar

$$n_b = \frac{P_b V_b}{RT}$$

$\Delta n$  moles sont passées dans le pneu.  $\Delta n$  est la différence entre le nombre de moles présentes dans le pneu en fin de gonflage et le nombre de mole qu'il contenait initialement.

$$\Delta n = n_{pf} - n_{pi} \text{ soit : } \Delta n = \frac{P_f V_p - P_i V_p}{RT} \text{ avec } P_i = 1,00 \text{ bar et } P_f = 2,6 \text{ bar.}$$

Déterminons la pression  $P_1$  dans la bouteille après le gonflage d'un pneu. Le nombre de moles restant alors dans la bouteille est :  $n_1 = n_b - \Delta n$  soit en explicitant ces quantités de moles selon l'équation

$$\text{d'état : } \frac{P_1 V_b}{RT} = \frac{P_b V_b}{RT} - \frac{(P_f - P_i) V_p}{RT}$$

$$\text{soit : } P_1 = P_b - (P_f - P_i) \frac{V_p}{V_b} \quad \text{AN : } P_1 = 13,7 \text{ bar.}$$

Le nombre  $k$  de pneus est déterminé par le nombre de termes  $\Delta n$  que l'on peut tirer avant que la pression de la bouteille atteigne 2,6 bar ( $P_f$ ) :  $n_b - k \cdot \Delta n \geq \frac{P_f V_b}{RT}$

$$\text{soit } k \leq \frac{n_b - \frac{P_f V_b}{RT}}{\Delta n} = \frac{P_b V_b - P_f V_b}{P_f V_p - P_i V_p}.$$

$k$  est un entier naturel (nombre de pneus), c'est la partie entière du résultat précédent.  $k = 9$ .

### 3. Gonflage isotherme d'un pneu de vélo :

1°) Système = { air contenu dans la pompe à  $t = 0$  }

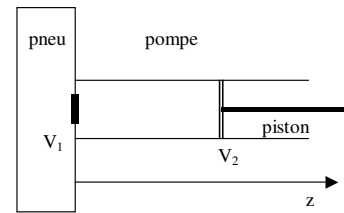
EI :  $V_i = S \cdot L$  ;  $T_i = T_o$  ;  $P_i = P_o$ .

EF : la valve s'ouvre quand la pression atteint  $P_f = P_{n-1}$ .

Alors  $V_f = S \cdot z$  ;  $T_f = T_o$  (pompage isotherme).

Le nombre de mole est conservé sur la transformation :

$$\frac{P_{n-1} S z}{RT_o} = \frac{P_o S L}{RT_o} \quad \text{d'où } z = \frac{P_o L}{P_{n-1}}$$



2°) Système = { air contenu dans la pompe + air contenu dans le pneu }.

C'est un système fermé ( $n_o = \text{cste}$ ).

Le nombre de mole total s'obtient en considérant l'état initial correspondant à l'ouverture de la valve : la pression vaut alors  $P_{n-1}$  dans tout le système.  $n = (P_{n-1}/RT_o) \cdot (V_p + S \cdot z)$ .

A l'état final : le piston de la pompe a chassé l'air contenu dans le corps de pompe entièrement dans le pneu :  $n_o = P_n \cdot V_p / (RT_o)$

$$\text{On tire : } P_n = P_{n-1} \cdot \left( 1 + \frac{S z}{V_p} \right) = P_{n-1} \cdot \left( 1 + \frac{P_o S L}{V_p P_{n-1}} \right) = P_{n-1} + \frac{P_o S L}{V_p}$$

Par récurrence :  $P_n = P_i + n \frac{P_o S L}{V_p}$  où  $n$  est le nombre de coups de pompe.

3°)  $P_i = P_o$  et l'on cherche  $n$  tel que  $P_n = P_f$ .

$$n = \left( \frac{P_f - P_o}{P_o} \right) \cdot \frac{V_p}{S L} \quad \text{avec } V_p = 2\pi R \cdot \pi D^2 / 4 \quad (\text{volume d'un tore})$$

En fait,  $n$  étant un entier,  $n$  vaudra la partie entière de cette quantité plus 1. AN :  $n = 35$ .

#### **4. Thermomètre différentiel à gaz :**

D'après l'équation du gaz parfait :  $nR = P_o \cdot V_o / T_o$  identique de part et d'autre de l'indice.

Après un déplacement  $x$  de l'indice de la gauche vers la droite, le volume à gauche devient  $V_g = V_o + xS$  et celui à droite devient  $V_d = V_o - xS$ .

La conservation du nombre de mole à gauche comme à droite amène :

$$nR = \frac{P_d (V_o - xS)}{T'} = \frac{P_g (V_o + xS)}{T}$$

L'équilibre mécanique de l'indice est obtenu quand  $P_d = P_g$ .

$$\text{On déduit : } T' = T \frac{V_o - xS}{V_o + xS} = T \left(1 - \frac{xS}{V_o}\right) \left(1 + \frac{xS}{V_o}\right)^{-1}$$

Comme  $xS \ll V_o$  on peut faire un D.L au premier ordre de l'expression :

$$T' \approx T \left(1 - \frac{xS}{V_o}\right) \left(1 - \frac{xS}{V_o}\right) \approx T \left(1 - \frac{2xS}{V_o}\right) \quad (\text{on ne conserve que les termes d'ordre 1 en } xS/V_o).$$

#### **5. Compression isotherme et compression poly-tropique :**

1. Système = {air enfermé dans le cylindre}. La hauteur initiale est déterminée par  $V_o = S \cdot h_i$  donc  $h_i = V_o/S$  AN :  $h_i = 0,90$  m (attention aux unités).

L'état final est obtenu par une condition d'équilibre thermique :  $T_f = T_o$  (transformation monotherme) et une condition d'équilibre mécanique : les forces s'exerçant sur les faces interne et externe du piston doivent se compenser. Il faut prendre en compte les forces pressantes ainsi que le poids de la masse  $m$  ajoutée sur le piston (le piston lui-même est de masse négligeable).

$$P_o S + mg - P_f S = 0 \quad \text{soit} \quad : P_f = P_o + mg/S$$

La conservation du nombre de mole dans le cylindre amène :  $P_o \cdot V_o = P_f \cdot V_f$

$$\text{D'où la hauteur finale : } h_f = \frac{V_f}{S} = \frac{P_o \cdot V_o}{S \left(P_o + \frac{mg}{S}\right)}. \quad \text{AN : } h_f = 0,45 \text{ m. (attention aux unités).}$$

Remarque : la transformation étant monotherme, mais non isotherme, la température du gaz va certainement, et de façon transitoire, augmenter durant la transformation pour revenir finalement à l'équilibre thermique. Le calcul de cette variation de température n'est pas envisageable sans faire de bilan énergétique au cours de la transformation.

2. Même type de question, mais ici les parois du cylindre étant athermanes et non plus diathermes (c'est-à-dire que maintenant ces parois sont thermiquement isolées), la température finale du piston sera modifiée.

La transformation, supposée polytropique, suivra la loi :  $P \cdot V^k = \text{cste}$

A l'état final, on aura donc toujours :  $P_f = P_o + mg/S$

et par la loi polytropique :  $P_f \cdot V_f^k = P_o \cdot V_o^k$

$$D'où : V_f = V_o \cdot (P_o/P_f)^{1/k} \quad \text{soit : } V_f = V_o \left( \frac{P_o}{P_o + \frac{mg}{S}} \right)^{1/k}$$

et donc  $h_f = V_f/S$ . AN :  $h_f = 0,51$  m.

## Autres fluides

### 6. Vitesse quadratique moyenne :

a) La pression cinétique est proportionnelle à la température absolue T :  $P = (1/3)N_V \cdot m \cdot u^{*2}$  où la vitesse quadratique  $u^* = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$

Mais la vitesse quadratique moyenne d'un gaz parfait monoatomique n'est pas proportionnelle à la température absolue T, elle est proportionnelle à sa racine carrée.

b) Energie cinétique moyenne de  $O_2$  :  $E = (5/2) \cdot kT$  par molécule (correspond aux mouvement de translation (3) et de rotation (2), accessibles à ces molécules diatomiques).

Seul le terme  $(3/2) \cdot kT$  est rattaché au mouvement de translation des molécules, mettant en jeu une énergie cinétique d'expression :  $\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}kT$

on aura donc :  $v^* = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$  résultat identique au cas du Gaz Parfait Monoatomique.

On donne  $u = v^* = 450$  m/s pour le dioxygène.

$$\text{Pour l'hélium } v_{He}^* = v^* \sqrt{\frac{M_{O_2}}{M_{He}}} \quad \text{A.N. : } v_{He}^* = 1270 \text{ m/s.}$$

L'énergie interne contenue dans l'échantillon, soit pour 2 moles de dioxygène et 5 moles de He, vaut :

$$U = 2 \cdot N_A \cdot \frac{5}{2} kT + 5 \cdot N_A \cdot \frac{3}{2} kT$$

On tire T de  $v^* = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$  donc :  $T = \frac{M_{O_2} v^{*2}}{3R} = 260$  K.

$$U = (5R + 15R/2)T = 27 \text{ kJ.}$$

### 7. Comportement d'un gaz réel, exploitation de tables thermodynamiques, :

1°) Le premier tableau montre que l'énergie interne U dépend du volume V à température fixée. Donc U est fonction de T et V : le gaz ne respectant pas la première loi de Joule, ce n'est pas un gaz parfait. Par ailleurs, on peut aussi constater que le produit P.V n'est pas invariant dans le premier tableau, alors que la température est fixée, ce qui mène à la même conclusion.

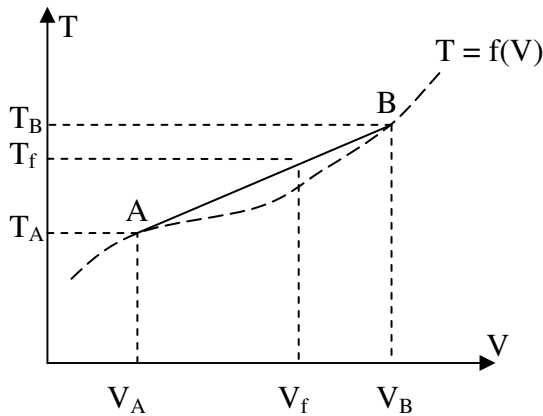
2°) Détente isochore : par définition  $V_f = V_i$ .

On lit :  $V_i = V_2 = 5,90 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  dans le premier tableau.

Le second tableau montre que la température finale sera comprise entre 320°C et 340°C car  $V_f$  est compris entre les volumes  $5,77 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $6,18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ .

On peut préciser la valeur de  $T_f$  par interpolation linéaire : la relation entre la température  $T$  et le volume  $V$  est a priori inconnue, mais on considère par approximation que sous la pression  $P = 70$  bar et entre

$T = 320^\circ\text{C}$  et  $T = 340^\circ\text{C}$ , la température est une fonction affine du volume.



Il suffit d'écrire de deux façons la pente du segment [AB] :

$$\frac{T_f - T_A}{V_f - V_A} = \frac{T_B - T_A}{V_B - V_A} \quad \text{dont on tire :}$$

$$T_f = T_A + \frac{V_f - V_A}{V_B - V_A} (T_B - T_A)$$

A.N. : avec  $V_f = V_i = 5,90 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $T_f = 326^\circ\text{C}$ .

La même méthode d'interpolation linéaire est employée pour évaluer l'énergie interne finale  $U_f$ . Comme  $V_f$  est compris entre les volumes  $5,77 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $6,18 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ , d'après le second tableau,  $U_f$  sera comprise entre 48,38 et 49,32  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Par interpolation :  $U_f = U_A + \frac{V_f - V_A}{V_B - V_A} (U_B - U_A)$

A.N. :  $U_f = 48,68 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  donc  $\Delta U = U_f - U_i = -6,12 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### 8. Equation d'état d'un liquide :

a) Pour  $T = T_0$  et  $P = P_0$ ,  $V = A = V_0 = 1,00 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

b)  $V(T, P) = V_0 \cdot \exp[\alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)]$  amène pour  $T = T_0$  et  $P = 1000$  bar :  $V = 0,95 \cdot 10^3 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ . Le volume de l'eau ne varie donc que de 5% quand la pression passe de 1 à 1000 bar : l'eau est un fluide très peu compressible.

Un gaz qui subirait la même variation de pression verrait son volume divisé par un facteur 1000 (à moins qu'il ne se liquéfie entre temps... !).

c)  $V = V_0 = \text{cste}$  (bouteille rigide). L'équation d'état reliant  $P$  et  $T$  :

$$V(T, P) = V_0 \cdot \exp[\alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)] \text{ avec ici } V = V_0 \text{ implique : } P - P_0 = \frac{\alpha}{\chi_T} (T - T_0)$$

A.N. :  $P = 1,8 \cdot 10^3$  bar, la bouteille va exploser avant que cette pression ne soit atteinte.

Pour un Gaz Parfait subissant la même variation de température, dans ces conditions isochores, on aurait :

$P = P_0 \cdot (T/T_0)$ . A.N. :  $P = 2,00$  bar, un Gaz Parfait est beaucoup plus compressible.

**9. Mélange idéal de gaz parfaits :**

1°)  $PV = (m/M)RT$  d'où  $m = MPV/(RT)$ . Attention : conversions d'unités. Exprimer les pressions en Pascal et les températures en Kelvin. Les masses sont en principe en kilogramme, mais n'intervenant que par leurs rapports à la masse molaire, on pourra conserver des valeurs en grammes.

Pour  $H_2$  :  $P = 3,33 \cdot 10^{-1} \text{ bar} = 3,33 \cdot 10^4 \text{ Pa}$  ;  $m = 6,15 \cdot 10^{-2} \text{ g}$

de même pour  $O_2$  :  $m = 2,41 \text{ g}$

de même pour  $N_2$  :  $m = 1,75 \text{ g}$

2°) Calculons les nombres de moles correspondant :  $n_{H_2} = 6,15 \cdot 10^{-2} \text{ g} / (2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) = 0,0308 \text{ mol}$  ;

$n_{O_2} = 2,41 \text{ g} / (32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) = 0,0753 \text{ mol}$  ;  $n_{N_2} = 1,75 \text{ g} / (28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) = 0,0625 \text{ mol}$  .

D'où les fractions molaires  $x_i = n_i / n_{\text{tot}}$  avec  $n_{\text{tot}} = 0,1686 \text{ mol}$

soit :  $x_{H_2m} = 0,015$  ;  $x_{H_2} = 0,18$  ;  $x_{O_2m} = 0,570$  ;  $x_{O_2} = 0,446$  ;

Les titres massiques répondent à la relation :  $x_{im} = m_i / m_{\text{tot}}$  où  $m_{\text{tot}} = 4,22 \text{ g}$  soit  $x_{N_2m} = 0,415$  ;  $x_{N_2} = 0,371$ .

Pression totale : par l'équation du gaz parfait  $P_{\text{tot}} = n_{\text{tot}}RT/V$  soit  $P_{\text{tot}} = 0,207 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

Pressions partielles : par la loi de Dalton  $P_i = x_i \cdot P_{\text{tot}}$  soit numériquement :

$P_{H_2} = 3,76 \cdot 10^3 \text{ Pa}$  ;  $P_{O_2} = 9,22 \cdot 10^3 \text{ Pa}$  ;  $P_{N_2} = 7,68 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ .