Ondes : propagation, interférences, ondes stationnaires (CORRIGES)

Propagation :

1. Cuve à onde :

Célérité c, avec SM = d : l'onde en M présente un retard $\Delta t = d/c$ par rapport à l'onde produite en la source S.
En S : $Y(S, t) = b.\cos(2\pi N.t)$
En M : $Y(M,t) = b.\cos(2\pi N.(t - d/c))$
ou encore $Y(M,t) = b.\cos(2\pi N.t + \phi)$ avec une avance de phase négative (retard de phase) de valeur $\phi = -2\pi N.d/c$
A.N. : Pour $d = d_1 = 4,0$ cm, $\phi = - 4\pi$ rad $= 0[2\pi]$; Y(S,t) et Y(M,t) ont en phase.

Pour $d = d_1 = 5,0$ cm, $\phi = - 5\pi$ rad $= \pi\ [2\pi]$; Y(S,t) et Y(M,t) ont en opposition de phase.

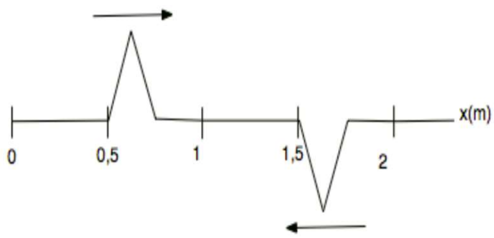
Pour $d = d_1 = 7,5$ cm, $\phi = - 2\pi.(10 \times 0,075/0,20)$ rad $= - 2\pi \times 3,75[2\pi]= - 2\pi \times 0,75\ [2\pi]$ rad
soit $\phi = 2\pi \times 0,25\ [2\pi]$ rad;
Y(S,t) et Y(M,t) ont en quadrature de phase, M étant en quadrature avance sur S.

2. Propagation d'une onde sur une corde.

1) $[T] = MLT^{-2}$ et $[\mu] = ML^{-1}$ donc $[T/\mu] = L^2.T^{-2}$ d'où le résultat.
2) 2-1 $\Delta t = L/c$.
   2-2 Après $4\Delta L/c$, l'onde s'est propagée sur une distance $4\Delta L$.
   En termes de fonction d'onde : $y(x, t) = y(x - ct, 0)$
   Ce qui à l'instant $t = 4\Delta L/c$ amène : $y(x, 4\Delta L/c) = y(x - 4\Delta L, 0)$
   2-2 Pour étudier l'évolution en $x = 4\ \Delta L$ en fonction du temps, on cherche $y(4\Delta L, t)$ qui s'obtient par : $y(4\Delta L, t) = y(4\Delta L - ct)$ en considérant des valeur significatives de t, de forme $t = n.\Delta L/c$. Remarquons que le profil temporel de l'onde est inversé par rapport à la forme de l'onde représentée en fonction de la position x à un instant donné.

3. Croisement de deux ondes progressives

Deux ondes se propagent dans la même direction et en sens contraire sur une corde. La valeur commune de la célérité des deux ondes est $c = 2,5$ m.s^{-1}.
A l'instant $t_0 = 0$, la corde a l'aspect suivant :



a) Onde transversale : la déformation du milieu est orthogonale à la direction de propagation.
b) Par rapport à $t_o = 0$, à l'instant t_1, les ondes se sont propagées d'une distance $d_1 = c.t_1 = 0,25$ m pour $t_1 = 0,10$ s, vers les x croissants pour l'onde (1) et décroissants pour l'onde (2)..
c) A t = 0,20 s, les ondes se seront propagées de $d_2 = c.t_2= 0,50$ m à partir de l'instant $t_o = 0$ s. L'onde (1) se propageant dans le sens croissant et l'onde (2) se propageant dans le sens décroissant vont à la rencontre l'une de l'autre. En procédant à une sommation graphique des deux ondes, on constate alors que les deux ondes vont s'annihiler à cet instant.
d) En x = 1,0 m :
   – l'onde (1) atteint ce point à t = 0,1 s (au sens où la corde commence alors à se déformer en ce point du fait de l'onde (1)). La déformation maximale, d'amplitude b, passe à t = 0,15 s, l'onde (1) aura complètement franchi le point d'abscisse x = 0,1 m à l'instant t = 0,2 s.
   - à ce même instant t = 0,2 s, l'onde (2) atteint alors l'abscisse x= 1,0 m. La déformation maximale, de cote –b passe en x = 0,1 m à l'instant 0,25 s. L'onde (2) a totalement franchi cette abscisse à t = 0,3 s.
   En considérant ces quelques instants caractéristiques, on peut donc par addition donner les valeurs de cote de la corde en x = 1,0 m :

t	0,10 s	0,15 s	0,20 s	0,25 s	0,30 s
Onde (1)	0	b	0	0	0
Onde (2)	0	0	0	-b	0
Onde totale	0	b	0	-b	0

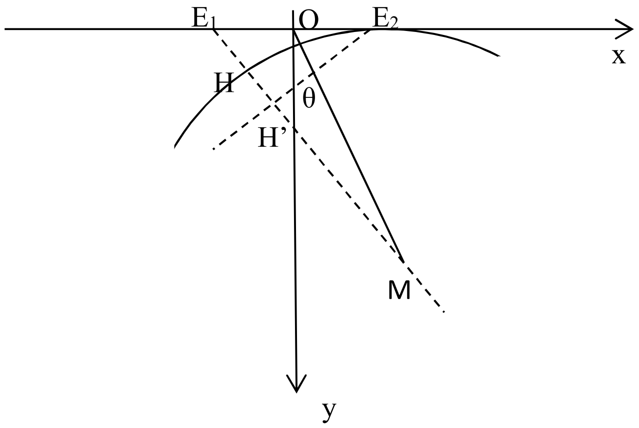
Interférences :

4. Expérience d'interférences sur des ultrasons :

1)

a) Voir figure ci-dessous. $E_1E_2 = a = 4{,}0$ cm et $R = OM = 50$ cm >> a

La distance E_1H est la différence de marche entre les deux ondes $E_1H = E_1M - E_2M = \delta$. Elle va déterminer le retard temporel qu'aura l'onde issue de E_1 par rapport à celle issue de E_2, au point M.



b) Comme R >> a, le projeté orthogonal H' de E_2 sur (E_1M) est assimilé à H. (la figure n'est pas à l'échelle, et exagère donc HH').
Dans ces conditions, (E_1M) et (OM) sont quasiment parallèles (θ est faible) donc l'angle θ = (Oy, OM) est égal à l'angle (E_1, E_2, H).n Il vient $E_1H \approx a.\sin\theta$.
D'où le déphasage $\varphi = 2\pi.\delta/\lambda = 2\pi.a.\sin\theta / \lambda$.

c) Maximum d'amplitude résultante pour des interférences constructives entre E_1 et E_2,
donc pour $\varphi = 0$ [2π] soit pour $a.\sin\theta / \lambda = p$ entier.
soit pour $\theta = \arcsin(p\lambda/a)$
Pour p = 0, $\theta = 0$;
pour p = ±1, $\theta = \pm \arcsin(\lambda / a) = \pm 12°$;
pour p = ±1, $\theta = \pm \arcsin(2\lambda / a) = \pm 25°$.

2) a) Minima d'amplitude résultante pour des interférences destructives entre E_1 et E_2,

donc pour $\varphi = \pi$ [2π] soit pour $a.\sin\theta / \lambda = p + 1/2$ (demi-entier).
pour p = 0, $\theta = \pm \arcsin(\lambda / 2a) = \pm 6°$;
pour p = ±1, $\theta = \pm \arcsin(3\lambda / 2a) = \pm 19°$.

b) on atteindrait une amplitude exactement nulle. On n'observera qu'une amplitude faible en pratique (mais pas nulle). La taille du récepteur amène à enregistrer une amplitude moyenne sur l'ensemble de la surface du récepteur, faisant intervenir des points où il n'y a pas exactement opposition de phase entre les deux ondes.
De plus, les deux émetteurs ne sont pas strictement identiques (amplitude...) et pas forcément strictement en phase.
Enfin, la présence de réflexions parasites sur les différentes surfaces solides environnant le dispositif vient encore compliquer cette observation.

3) On inverse alors les positions de minima et de maxima en introduisant un déphasage π entre les deux émetteurs. Si on inverse les deux émetteurs, ils se retrouvent à nouveau en phase et l'on retrouve les résultats des 1°) et 2°).

5. Interférences de deux ondes sonores frontales.

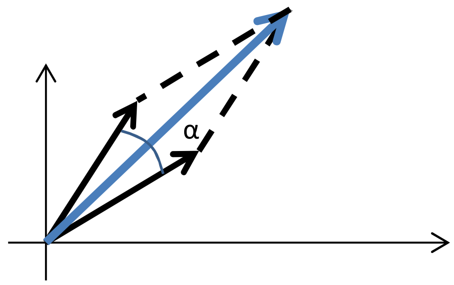
1) Onde progressive à x croissant. Le retard de l'onde en x = 0, par rapport à celle émise depuis le haut-parleur HP1, vaut (D+x)/c.

$$y_1(x,t) = a.cos\left(\omega\left(t - \frac{D+x}{c}\right)\right) = a.cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(D+x)\right)$$

2) Onde progressive à x décroissant. Le retard de l'onde en x = 0, par rapport à celle émise depuis le haut-parleur HP2, vaut (D-x)/c.

$$y_2(x,t) = a.cos\left(\omega\left(t - \frac{D-x}{c}\right)\right) = a.cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(D-x)\right)$$

3) Diagramme de Fresnel



4) a) α angle entre les deux vecteurs :

$$\alpha = \frac{\omega}{c}(D+x) - \frac{\omega}{c}(D-x) = 2\frac{\omega}{c}x$$

Les deux vecteurs ayant même norme (ondes de même amplitude), la figure est un losange. Le vecteur somme a pour norme 2a.cos(α/2) = 2a.cos(ωx/c).

b) Par le calcul : $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \ a.cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(D+x)\right) + a.cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(D-x)\right)$

soit : $y(x,t) = 2a.cos\left(\frac{1}{2}2\omega t - \frac{\omega}{2c}(D+x) - \frac{\omega}{2c}(D-x)\right).cos\left(-\frac{\omega}{2c}(D+x) + \frac{\omega}{2c}(D-x)\right)$

$$y(x,t) = 2a.cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}D\right).cos\left(-\frac{\omega}{c}x\right)$$

Signal d'amplitude :

$$\left|2a.cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)\right|$$

5) a) amplitude maximale pour cos(ωx/c) = ±1 donc ωx/c = pπ (p entier) soit x = pπc/ω = p.c/(2f) = p.λ/2

b) vecteurs non déphasés (α = 0).

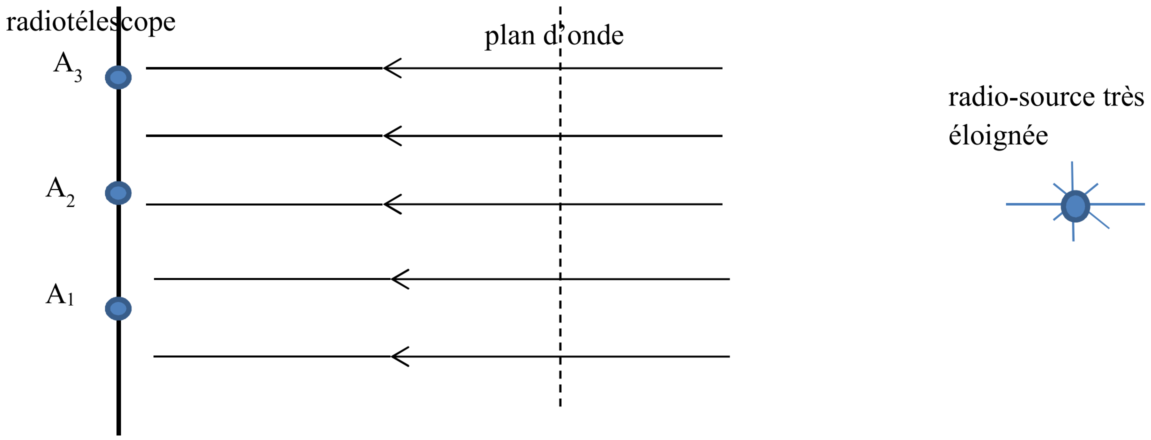
6) a) amplitude nullle (minimale) pour cos(ωx/c) = 0 donc ωx/c = pπ + π/2 (demi-entier) soit x = p.λ/2+λ/4

b) vecteurs en opposition (α = π).

7) Entre deux maxima consécutifs : Δx = c/(2f) = λ/2 (p varie de une unité) ; x aura varié d'une demi longueur d'onde.
On déduit : c = 2f.d = 339 m.s^{-1}.

6. Radiotélescope :

Un radiotélescope est constitué de 16 antennes alignées, distantes de d = 1,50 m et recevant des signaux de longueur d'onde λ = 0,030 m.



Quand le radiotélescope pointe exactement sur la radiosource (schéma ci-dessus) les plans d'onde, orthogonaux à la direction de propagation, sont parallèles aux antennes de réception (A_1 , A_2 etc...). Les signaux reçus par les antennes sont alors en phase. Leur superposition correspond à une interférence constructive, le signal somme est donc d'amplitude maximal.

Quand la Terre (et le télescope) aura tourné d'un angle α, le plan des antennes aura fait de même, ce qui introduit un déphasage ente deux antennes consécutives. La différence de marche entre antennes séparées d'une distance d sera alors : $\delta = d.\sin\alpha$, soit un déphasage $\varphi = 2\pi.d.\sin\alpha/\lambda$.
Le premier minimum correspond à l'opposition de phase $\varphi = \pi$ soit $\sin\alpha = \lambda/(2d)$
A.N. : $\alpha = \arcsin(\lambda/(2d)) = 0{,}010$ rad.

La Terre tourne avec une vitesse angulaire $\Omega = 2\pi/j_S = 7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}. L'instant cherché t_o est tel que $\Omega.t_o = \alpha$ soit numériquement : $t_o = \alpha/\Omega = 1{,}4.10^2$ s = 2,3 min.

Ondes stationnaires :

7. Son réfléchi :

Un haut-parleur de position A, alimenté par un GBF de fréquence N = 100 Hz est dirigé vers une surface plane réfléchissante, disposée en une position O perpendiculairement à l'axe (Ax) de propagation. On néglige tout phénomène d'amortissement et de réflexion multiple.

a) La longueur d'onde λ du son émis répond à : $\lambda = c / N$ où c = 340 m.s^{-1} soit donc λ = 3,40 m.

b) Au point O, surface solide, l'air ne vibre pas ; pas de déplacement au contact de cette surface rigide. On aura à cet endroit un ventre de pression acoustique. La force pressante s'exerçant sur la paroi est encaissée par la réaction de cette paroi rigide. Le microphone décèlera donc un maximum d'intensité sonore en ce point.

c) Pour une onde progressive, l'expression sera pour l'onde incidente :
$p_i(x, t) = p_a.\cos(\omega(t - x/c) + \varphi_i)$ avec $\omega = 2\pi N$
Mais la condition limite imposée en x = 0 amène une onde réfléchie, d'expression générique :
$$p_r(x, t) = p_a.\cos(\omega(t + x/c) + \varphi_r)$$
onde réfléchie se superposant à l'onde incidente et amenant : $p(0, t) = p_a.\cos(\omega t + \varphi)$ en x = 0 (position de la plaque réfléchissante).
La superposition des ondes incidentes et réfléchies conduit à :
$$p(x, t) = p_a.\cos(\omega(t - x/c) + \varphi_i) + p_a.\cos(\omega(t + x/c) + \varphi_r)$$

En appliquant la formule trigonométrique :

$$cosp + cosq = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

p(x, t) apparaît alors comme une onde stationnaire de forme :

$$p(x, t) = p_a.\cos(\omega t + \varphi).\cos(\omega x/c + \psi)$$

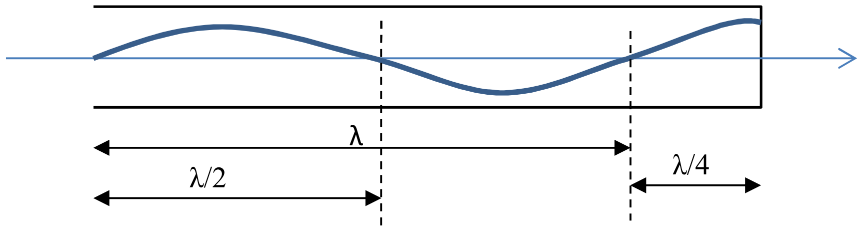
avec cos ψ = 1 car en x = 0, il faut p(0, t) = p_a.cos(ωt + φ).
On retient ψ = 0, ce qui conduit finalement à :
p(x, t) = p_a.cos(ωt + φ).cos(ωx/c)
L'onde acoustique qui serait obtenue en l'absence de l'écran réfléchissant ne serait constituée que de l'onde incidente (onde progressive).

d) Pour retrouver la même intensité sonore, il faut que la quantité ωx/c varie de 2π ou de π (plus généralement d'un nombre entier de fois π). Ainsi, on passera, à partir de O, d'un ventre à un ventre.
Le plus faible déplacement du microphone à partir de O sera donc tel que : ωx/c = π
soit tel que : x = πc/(2πN) = c/(2N) = λ/2. A.N. : x = 1,70 m.
En se déplaçant d'un nombre entier de demi longueurs d'onde (λ/2) on se retrouvera dans une situation analogue.

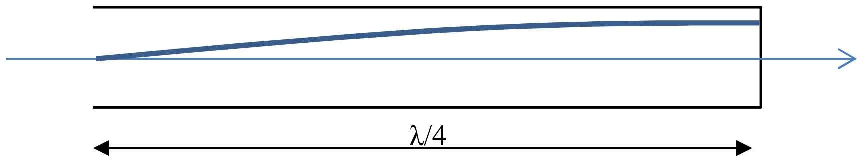
8. Notes pour un instrument de musique :

Un instrument de musique est modélisé comme une cavité de longueur L, fermée à une extrémité et ouverte à l'autre. La vitesse du son dans l'air est c = 340m.s^{-1}.

a) A l'extrémité fermée : ventre de pression acoustique ; à l'extrémité ouverte : noeud de pression acoustique (voir cours).



Pour la situation de plus faible fréquence, donc de plus grande longueur d'onde, (λ = c/N),



On aura : L = λ/4 soit L = c/(4.f_o) A.N. : L = 19,3 cm.

b) La fréquence f_2 immédiatement supérieure pouvant être émise par cet instrument est obtenue pour la condition : 3λ/4 = L donc f_1 = 3.f_o = 1,32.10^3 Hz.
Les fréquences f_n pouvant être émises répondent à :
L = (λ/4) + n.(λ/2) (modes) où n est un entier positif.
soit avec λ = c/f :

$$L = \frac{c}{4f_n} + n\frac{c}{2f_n}$$

relation dont on tire : f_n = (2n + 1).f_o avec f_o = c/(4L).

c) Pour éliminer le mode de fréquence f_1, il faut placer un trou dans la partie latérale du tuyau en la position du ventre de pression de ce mode, donc aux deux tiers du tuyau. Le trou imposera alors un noeud de pression en ce point ce qui annulera le mode.
Ce résultat reste très simpliste, il ne rend pas compte des subtilités du fonctionnement réel des instruments de musique et ne donne qu'un principe général.

9. Corde excitée par un vibreur.

a) Conditions aux limites en $x = 0$: la vibration est imposée par le vibreur, $y(0, t) = z_o.\sin(\omega t)$ et en $x = L$, extrémité fixe, $y(L, t) = 0$.

$y(x, t)$ est une onde stationnaire, car la vibration est supposée de forme :
$y(x, t) = A.\sin(\omega t + \varphi).\sin(kx + \psi)$, où A, ω, k, φ et ψ sont des constantes telles que $k = \omega/c$ où c est la célérité de l'onde.

b) En $x = 0$, la condition limite impose $z_o.\sin(\omega t) = y(0, t) = A.\sin(\omega t + \varphi).\sin(\psi)$
ce qui amène nécessairement : $\varphi = 0$ et $z_o = A.\sin\psi$.
On a donc : $y(x, t) = A.\sin(\omega t).\sin(kx + \psi)$ avec $A = z_o/\sin\psi$.

En $x = L$, $A.\sin(\omega t).\sin(kL + \psi) = 0$ à tout instant
ce qui impose $\sin(kL + \psi) = 0$ soit donc $kL + \psi = p\pi$ avec p entier.
On peut choisir $\psi = -kL$, ou $\psi = \pi - kL$. En remarquant que $\sin(kx + \pi - kL) = -\sin(kx - kL)$ ce choix ne jouera en effet que sur le signe du facteur $\sin(kx + \psi)$.
Retenons : $y(x, t) = (z_o/\sin\psi).\sin(\omega t).\sin(kx - kL)$

soit finalement : $y(x, t) = (z_o/\sin(kL)).\sin(\omega t).\sin(kL - kx)$.
$y(x, t)$ apparaît ainsi sous la forme : $y(x, t) = A(x).\sin(\omega t)$ avec un facteur $A(x)$positif.

c) $A(x) = z_o/\sin(kL)).\sin(kL - kx)$ est de valeur extrémale $\pm y_o$ avec $y_o = z_o/\sin(kL)$.
L'amplitude de la vibration devient donc très grande si $kL = n\pi$, ce qui conduirait (théoriquement) à ce que y_o tende vers l'infini. Cette situation est obtenue pour des valeurs de k de forme : $k = n\pi/L$.
Ceci correspond à l'existence de modes propres de la vibration. En pratique, il y a des pertes énergétiques dans la propagation des ondes. Le vibreur donne en permanence de l'énergie à la corde pour entretenir les vibrations, dont l'amplitude sera en fait limitée à une valeur y_o donnée, du fait de ces pertes. On observe donc l'existence d'un simple maximum d'amplitude à la résonance.
Pour $k = n\pi/L$, $y(x, t)$ prend la forme :

$$y(x,t) = y_o sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}(L-x)\right)$$

soit :

$$y(x,t) = y_o sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

On retrouve l'expression d'une onde stationnaire pour le mode propre de rang n.

Cette étude permet d'interpréter un peu plus complètement l'expérience de la corde de Melde. Le vibreur excite la corde à une fréquence réglable, lui donnant de l'énergie qui s'y dissipe du fait des frottements. On n'observera d'amplitude notable que lorsque la fréquence imposée par le vibreur correspond à l'un des modes propres de la corde.
En toute rigueur, l'amplitude z_o de la vibration en $x = 0$ (position du vibreur) est en désaccord avec les modes en $k = n\pi/L$ prévus pour un noeud en $x = 0$ et en $x = L$. Mais lors des passages par ces fréquences propres amenant résonance de la corde, $z_o << y_o$, on a pratiquement un noeud au niveau du vibreur.
Le noeud est en quelque sorte virtuel et situé un peu avant l'extrémité du vibreur. Mais la distance entre ce noeud virtuel et l'extrémité du vibreur est pratiquement négligeable.

10. Notes sur une corde de guitare :

Une corde de guitare se modélise comme une corde vibrante de longueur 64,2 cm fixée à ses deux extrémités.

a) Pour le fondamental : $L = \lambda/2$ donc $\lambda = c/f = 2L$, soit $c = 2fL$ A.N. : $c = 378$ m.s^{-1}.

b) Pour chaque mode n, la fréquence f_n est $f_n = n.f$. On détermine la note correspondante en divisant la fréquence par une puissance de 2 ($2, 2^2, 2^3, ...$) jusqu'à tomber sur une des notes fournies dans le tableau (changement d'octave : descendre d'une octave consiste à diviser par deux la fréquence du son).

harmonique	2	3	4	5	6	7
Fréquence (Hz)	588	882	$1{,}18.10^3$	$1{,}47.10^3$	$1{,}76.10^3$	$2{,}06.10^3$
Note	$Ré_4$	La_4	$Ré_5$	$Fa\#_4$	La_5	?

Remarques :

1. La valeur placée en indice est le numéro d'octave. La référence usuelle (diapason) pour l'accord des instruments de musique est le La_3 de fréquence 440 Hz. C'est aussi la tonalité du téléphone...
2. Pour l'harmonique 7, $f_7 = 7 \times 294 = 2{,}06.10^3$ Hz soit $f_7/4 = 515$ Hz valeur située au-delà du tableau, que l'on peut compléter avec : $f(Do_4) = f(Si_3) \times 2^{1/12} = 523$ Hz.
   L'harmonique 7 ne correspond pas à une note de musique (même approchée). Elle est située entre le Si_5 et le Do_6