Mouvement dans un champ de force centrale conservatif (CORRIGES)

1. Satellite circulaire :

Application directe du cours :

a) Utiliser le TMC

Ecrire la RFD sur la base polaire (ou sur celle de Frenet).

Sa projection sur la direction radiale (ou normale) amène après simplification v² = KM/(R+ h).

v_o = 7920 m/s = 28500 km/h. $T_o = 2\pi(R+h)/v_o$ = 1h 24 mn 37 s b) voir cours

Résolution détaillée :

a) Ecrivons le TMC pour S(m), dans le référentiel géocentrique. $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

car la force de gravitation $\vec{F} = \dfrac{-GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ est radiale donc son moment en O est nul.

Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\overrightarrow{OS}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$. Donc S évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

Le mouvement étant supposé circulaire, le vecteur-vitesse est à tout instant orthogonal au vecteur position.

$\vec{L}_O = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \vec{v} = mrv\overrightarrow{e_z}$ et comme m = cste, r = R + h = cste et $\vec{L}_O = \overrightarrow{cste}$, on aura nécessairement v = cste. Le mouvement est donc uniforme (module de la vitesse invariant).

Pour déterminer ce module v, écrivons la RFD pour S(m), dans le référentiel géocentrique :

$\vec{F} = \dfrac{-GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r} = m\vec{\gamma}$ où l'accélération s'exprime par : $m\vec{\gamma} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\dfrac{d(v\overrightarrow{e_\theta})}{dt} = -mv\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$

avec $\dot{\theta} = v/r$ qui donne donc : $m\vec{\gamma} = -m\dfrac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r}$

On tire donc de la RFD : v²/r = GMm/r² d'où : $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R+h}}$ AN : v = v_o = 7,92.10³ m/s.

La période orbitale s'obtient par : T = 2π(R + h)/v

soit : $T = T_o = \dfrac{2\pi(R+h)^{3/2}}{\sqrt{GM}}$ AN : T_o = 1 h 24 mn en considérant h << R.

b) Orbite dans le plan équatorial, circulaire, de rayon r = R + h tel que T= 1 j_S.

$$r_{géo} = \left(\frac{GM.j_S{}^2}{4\pi^2}\right)^{2/3}$$

2. **Sonde spatiale :**

a. Une sonde spatiale de masse 200 kg a été placée sur une orbite circulaire d'altitude h = 300 km. Quelle est l'énergie supplémentaire à lui communiquer pour que cette sonde puisse explorer le système solaire, c'est à dire se libérer de l'attraction terrestre ? Quelle est alors sa vitesse dans le référentiel géocentrique ? On donne K = $6{,}67.10^{-11}$ u.s.i. constante universelle de gravitation et la masse de la Terre M = $5{,}97.10^{24}$ kg. Rayon terrestre : 6370 km.

b. Cette vitesse a été communiquée dans une direction tangente à sa trajectoire circulaire autour de la Terre. Est-ce que cette sonde pourra quitter le système solaire ? On donne le rayon orbital de la Terre autour du Soleil a = $1{,}5.10^{11}$ m, et l'on connaît la durée d'une année terrestre.

Réponse :

a. Ecrire la conservation de l'énergie, entre un état initial où la sonde est en orbite circulaire d'altitude h et un état final où la sonde est infiniment éloignée de la Terre.

$E_m = E_{pterr} + E_c$ où E_{pterr} est le terme d'énergie potentielle de gravitation terrestre.

D'après le cours : $E_m = -KMm/2(R + h)$ à l'état initial. La libération de la gravitation terrestre suppose d'atteindre un point infiniment éloigné de la Terre à une vitesse non nulle. Donc $E_m > 0$.

Donc il faut : $\Delta E > KMm/2(R + h)$. Cette énergie sera communiquée par un propulseur, sous forme d'énergie cinétique, dans le référentiel géocentrique.

L'énergie cinétique est donc après propulsion $E_c = E_{cinit} + \Delta E$ avec $E_c\text{init} = mv_i^2/2 = GMm/2(R + h)$ donc après propulsion avec $E_c = mv^2/2 = GMm/(R + h)$ et donc dans le référentiel géocentrique :

$$v = v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R+h}}$$

AN : $v_1 = 1{,}09.10^4$ m/s.

Dans le référentiel héliocentrique : $v_2 = v_T + v_1$. En étudiant le mouvement circulaire de la Terre autour du Soleil : $v_T = \sqrt{\frac{GM_S}{a}} = 3{,}0.10^4\ m/s.$

La troisième loi de Kepler donne accès à M_S :

$GM_S/(4\pi^2) = a^3 / T^2$ donne $M_S = 4\pi^2.a^3 / (G.T^2)$. avec T = 1 an = 365,25 x 86400 s.

$v_2 = 4{,}1.10^4$ m/s.

La vitesse v_3 nécessaire pour se libérer de l'attraction solaire, depuis l'orbite terrestre, dans le référentiel héliocentrique, est :

$$v_3 = \sqrt{\frac{2GM_S}{a}}$$

soit $v_3 = 4{,}2.10^4$ m/s > v_2 (mais $v_3 \approx v_2$).

3. Atome de Bohr :

1°) Par la loi de Coulomb : $\vec{F} = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e_r}$ F force centrale.

Dans un référentiel R_O lié à la particule de centre O, supposé galiléen (cette particule a une masse beaucoup plus forte que le mobile de position M), le TMC donne : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

En effet le moment de la force de Coulomb par rapport à O est nul, puisqu'à tout instant cette force est colinéaire à (OM).Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$. Donc M évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

Le mouvement étant supposé circulaire, le vecteur-vitesse est à tout instant orthogonal au vecteur position.

$\vec{L_O} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \vec{v} = mrv\overrightarrow{e_z}$ et comme m = cste, r = cste et $\vec{L_O} = \overrightarrow{cste}$, on aura nécessairement une vitesse de module v = cste. Le mouvement est donc uniforme (module de la vitesse invariant).

2°) Energie mécanique : $E = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r}$

Déterminons le carré de la vitesse.

Pour cela, écrivons la RFD pour M(m), dans le référentiel centré sur le proton (supposé galiléen).

$\vec{F} = \dfrac{-e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\overrightarrow{e_r} = m\vec{\gamma}$ où l'accélération s'exprime, dans le cas de ce mouvement circulaire, par :

$m\vec{\gamma} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\dfrac{d(v\overrightarrow{e_\theta})}{dt} = -mv\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$ avec $\dot{\theta} = v/r$ qui donne donc : $m\vec{\gamma} = -m\dfrac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r}$

On tire donc de la RFD : $v^2/r = e^2/(m4\pi\varepsilon_o r^2)$ soit finalement : $v^2 = \dfrac{e^2}{m4\pi\varepsilon_o r}$

On en déduit alors : $E = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_o r}$ que l'on identifie à $E = -K/n^2$.

Il vient donc une quantification du rayon des trajectoires envisageables : $r = \dfrac{n^2e^2}{8\pi\varepsilon_o K} = n^2 a_o$

où $a_o = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_o K}$ est le rayon de Bohr. AN : a_o = 0,053 nm.

Attention à convertir K = 13,6 eV en Joule : $K = 13{,}6 .\ 1{,}6.10^{-19} = 2{,}18.10^{-18}$ J.

$\vec{L_O} = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \vec{v} = mrv\overrightarrow{e_z} = \dfrac{mre}{\sqrt{m4\pi\varepsilon_o r}}\overrightarrow{e_z} = nL_1\overrightarrow{e_z}$ avec $L_1 = n\sqrt{\dfrac{ma_o}{4\pi\varepsilon_o}}$

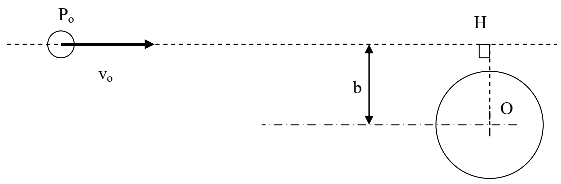
Le moment orbital L_O est donc lui aussi quantifié par le nombre quantique principal n.

4. Expérience de Rutherford :

d. Déduire une relation entre v_o, le rayon r_{min} correspondant à la distance minimale d'approche et la vitesse v_{min} dans cette dernière situation et en tirer l'expression de r_{min} en fonction des différents paramètres du problème.

Réponses :

a). Par la loi de Coulomb : $\vec{F} = \dfrac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}\vec{e_r}$ force centrale répulsive.



Dans un référentiel R_O lié à la particule de centre O, supposé galiléen (cette particule a une masse beaucoup plus forte que le projectile de position P), le TMC donne : $\dfrac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

En effet le moment de la force de Coulomb par rapport à O est nul, puisqu'à tout instant cette force est colinéaire à (OP).Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\overrightarrow{OP}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$. Donc P évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

On calcule la valeur du moment cinétique à partir des conditions initiales :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OP}(t=0) \wedge m\vec{v}(t=0)$$

soit en introduisant le point H, projeté orthogonal de O sur la droite support du vecteur vitesse initiale :

$$\vec{L}_O = \left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}(t=0)\right) \wedge m\vec{v}(t=0) = \overrightarrow{OH} \wedge m\vec{v}(t=0) + \vec{0} = mbv_o\vec{e_z}$$

b). Seule interaction, l'interaction coulombienne, qui dérive de $E_p = 2Ze^2/(4\pi\varepsilon_o r)$. Donc mouvement conservatif.

$E_m = E_{peff}(r) + \frac{1}{2}m\dot{r}^2$ à partir de l'expression de l'énergie mécanique, en explicitant la vitesse en coordonnées polaire et en introduisant la conservation du moment cinétique $L = mr^2\dot{\theta}$. (voir cours).

c). voir cours. La valeur de b modifie celle de $L = mbv_o$, déterminée par les conditions initiales (b, v_o). Ceci influe sur la courbe $Ep_{eff}(r) = L^2/(2mr^2) + 2Ze^2/(4\pi\varepsilon_o r)$.

d) Au minimum de r, $\dot{r} = 0$. Donc $E_m = E_{peff}(r_m)$.

La conservation de l'énergie mécanique donne :

$$\frac{1}{2}m{v_o}^2 = \frac{(mbv_o)^2}{2m{r_m}^2} + \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_o r_m}$$

qui se met sous la forme d'une équation du second degré sur r_m.

La solution positive donne r_m.

$$r_m = \frac{1}{2}\left(\frac{Ze^2}{m{v_o}^2\pi\varepsilon_o} \pm \sqrt{\left(\frac{Ze^2}{m{v_o}^2\pi\varepsilon_o}\right)^2 + 4b^2}\right)$$

5. **Vitesse d'un météore.**
   S'inspirer de la démarche suivie dans l'exercice précédent.

a. $F = GMm/r^2$. force centrale, L = cste. (voir cours). $L = mr^2(d\theta/dt) = mbv_o$.

b. mouvement à force centrale, conservation du moment cinétique, vitesse maximale quand le rayon est minimal. Du point de vue énergétique, même conclusion car au rayon minimal l'énergie potentielle sera minimale, donc l'énergie cinétique sera maximale.

c. $r_{min} = 1{,}2.10^7$ m (≈ 2 rayons terrestres). $L = mr_m.v_1$ donne v_1.

6. Mouvement d'un satellite terrestre :

1°) On assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R = 6400 km et de masse M et la satellite à un point matériel(S, m). On suppose le référentiel géocentrique galiléen. $G = 6{,}67.10^{-11}$ u.s.i..

Ecrivons le TMC pour S(m), dans le référentiel géocentrique. $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

car la force de gravitation $\vec{F} = \frac{-GMm}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ est radiale donc son moment en O est nul.

Le moment cinétique en O est donc constant.

Le vecteur position $\overrightarrow{OS}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{L}_O = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$. Donc S évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur, passant par O : le mouvement a lieu dans ce plan.

$\vec{L}_O = mr\overrightarrow{e_r} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$; on a donc $r^2\dot{\theta} = L/m = C$ où C est la constante des aires.

2°) On affirme l'équation polaire de la trajectoire : $r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{p}{1 - e.\cos(\theta - \theta_o)}$.

tracé : voir cours.

3°) Par l'équation polaire $r_{min} = h + R = p/(1+e)$ et $r_{max} = H + R = p/(1-e)$; on tire $p = 1{,}2.10^4$ km et e = 0,72.

4°) Utiliser la 3° loi de Kepler, avec a= 2R + h + H.

5°) $\Delta E = -GMm/2r_{géo} - GMm/2a$

7. Masse de la Terre :

a). Le module du champ de gravitation terrestre répond à $\mathcal{G}(r) = GM/r^2$, avec à la surface de la Terre : $\mathcal{G}(r = R) = GM/R^2 = g$ valeur du champ de pesanteur. D'où $M = gR^2/G$.

b) Par l'étude du mouvement de la Lune : $M = 4\pi^2 a^3/kT^2$. D'où $m = 6{,}02.10^{24}$ kg.

8. Vitesses de périhélie et d'aphélie :

En utilisant l'équation polaire d'une ellipse on écrit les rayons des périhélie et aphélie :
$r_a = a(1 + e)$ (rayon maximal) et $r_p = a(1 - e)$ (rayon minimal).

Par la loi des aires, en notant σ le module du moment cinétique, $\sigma = mr^2\dot{\theta}$ = cste.
En les périhélie et aphélie, étant à des valeurs extrémales du rayon, la vitesse n'a pas de composante radiale ($dr/dt = 0$), ce qui n'est pas le cas ailleurs sur l'ellipse.
La vitesse en ces points particulier est donc ortho-radiale, c'est à dire orthogonale au vecteur position.
On a donc : $\sigma/m = v_a.r_a = v_p.r_p = C$

ce qui amène : $v_a = \dfrac{C}{\frac{p}{1-e}}$ et $v_p = \dfrac{C}{\frac{p}{1+e}}$

Par ailleurs, la loi des aires impose : $C = 2(dS/dt)$ où dS/dt est la vitesse aréolaire, invariante.
$dS/dt = S/T = 2(\pi ab)/T$ où S est la surface de l'ellipse et T la période de révolution de la terre dans son orbite autour du soleil.

Les valeurs a,b et e caractérisant l'ellipse sont liées par : $b = a\sqrt{1-e^2}$

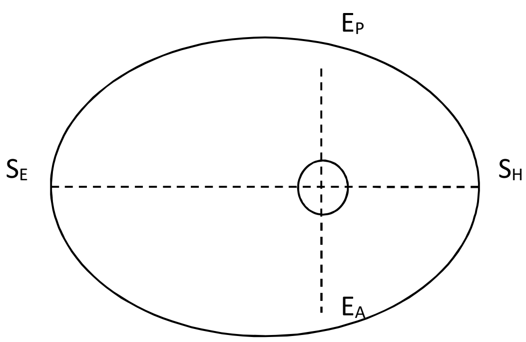
Le grand axe de l'orbite est 2a, avec : $2a = \dfrac{p}{1-e} + \dfrac{p}{1+e} = \dfrac{2p}{1-e^2}$ donc : $p = a(1 - e^2)$.

En rassemblant ces informations on explicite : $v_a = \dfrac{2\pi a}{T}\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}$ et $v_p = \dfrac{2\pi a}{T}\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}$

A.N.: $v_a = 29{,}4.10^3$ m/s et $v_p = 30{,}4.10^3$ m/s.

9. Durée d'une saison :

La Terre suit une orbite légèrement elliptique autour du Soleil, d'excentricité $e = 0{,}0167$. Sa vitesse de périhélie vaut $v_p = 30{,}4.10^3$ m.s^{-1} et le paramètre p de sa trajectoire vaut $p = 1{,}49.10^{11}$ m.



La trajectoire de la Terre autour du Soleil répond à : $r = \dfrac{p}{1+e.\cos\theta}$ où p et e sont donnés.

Le mouvement est à force centrale : il suit la loi des aires et donc : $r^2\dot{\theta} = r^2\dfrac{d\theta}{dt} = C$.

Cette relation établit un lien entre temps et angle polaire, que l'on peut intégrer selon : $\Delta t = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r^2}{C}d\theta$

La valeur de C est déterminée par les conditions initiales. Connaissant les conditions du mouvement à un instant donné, C est définitivement déterminée. C'est le cas au niveau du périhélie.

Il vient : $C = \dfrac{\left\|\overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v}\right\|}{m} = r_p.v_p$ = 4,46.10^{15} m²s^{-1}.

Il reste à intégrer : $\Delta t = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r^2}{C}d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{C}\frac{p^2}{\left(1+e.\cos\theta\right)^2}d\theta$

La valeur du produit e.cosθ est comprise entre –e et + e avec e << 1 . En utilisant un D.L.1, on obtient :

$$\Delta t \approx \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{C}p^2(1-2e.\cos\theta)d\theta = \frac{p^2}{C}\left([\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} - 2e[\sin\theta]_{\theta_1}^{\theta_2}\right)$$

AN : Dans l'hémisphère Nord, l'hiver correspond à une évolution entre θ = 0 et θ = π/2. Δt_{hiver} = 7,66.10^6 s

L'été correspond à une évolution entre θ = π et θ = 3π/2. $\Delta t_{été}$ = 7,99.10^6 s

10. Energie sur une orbite elliptique ; retour d'un satellite :

1°) Ecrivons l'expression de l'énergie mécanique du satellite : $E = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{r}$ (1)

avec en coordonnées polaires : $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$

La conservation du moment cinétique se traduit par la constante des aires : C = r²$\dot{\theta}$ = cste.

D'où : $E = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{mr^2\dot{\theta}^2}{2} - \dfrac{GMm}{r} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{GMm}{r}$

Les valeurs r_a et r_p étant des valeurs extrémales de r, elle correspondant à l'annulation de $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt}$.

Elles sont donc solution de l'équation : $E = \dfrac{mC^2}{2r^2} - \dfrac{GMm}{r}$

qui s'écrit sous la forme d'une équation du second degré en r : $E.r^2 + GMm.r - mC^2/2 = 0$

La somme des solutions est $r_a + r_p = 2a = \dfrac{-GMm}{E}$ d'où : $E = \dfrac{-GMm}{2a}$ (2)

En s'appuyant sur l'expression du champ de gravitation en fonction de la distance r au centre de la Terre, on aura :

$- g_o.4\pi R^2 = -4\pi GM$ dont on déduit : $GM = g_o.R^2$ (3)

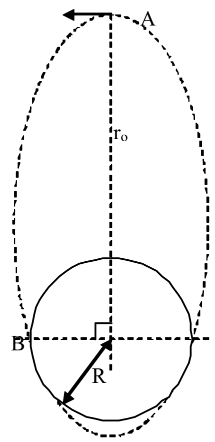
En utilisant (1), (2) et (3), on écrit : $-\dfrac{g_o R^2 m}{2a} = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{g_o R^2 m}{r}$

soit finalement : $v^2 = g_o R^2\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)$

2°) Le satellite est initialement situé sur une orbite circulaire de rayon r_O ; déterminons sa vitesse v_O.

On a alors a = r et donc par la relation précédente : $v_o = \sqrt{\dfrac{g_o R^2}{r_o}}$.

Le satellite va subir une variation de vitesse de v_1 à v_o, au niveau du point A, pour le placer sur l'orbite de retour (AB).



A son passage par un point A de l'orbite circulaire de rayon r_o, on exerce sur le satellite dans la direction de son vecteur vitesse et de façon quasi instantanée une force qui le ralentit (rétro-fusées) le plaçant sur l'orbite de retour.

Le demi grand axe a_1 de cette orbite est relié à ses caractéristiques géométriques.

Au point A : $r = r_a = r_o = \dfrac{p}{1-e}$

Au point B : $\theta = \pi/2$, $r = r(\theta = \pi/2) = p = R$

On en déduit : $1 - e = R/r_o$ et donc $e = 1 - \dfrac{R}{r_o}$

Comme : $2a_1 = \dfrac{p}{1-e} + \dfrac{p}{1+e} = \dfrac{2p}{1-e^2}$ donc : $p = a_1(1 - e^2)$

Connaissant p = R et e, on tire : $a_1 = \dfrac{r_o}{2 - \dfrac{R}{r_o}}$

En exploitant la relation construite en 1°) on obtient alors la vitesse en A sur cette orbite : $v_1 = \sqrt{\dfrac{g_o R^3}{{r_o}^2}}$

La variation d'énergie qu'il faut faire subir au satellite en A pour assurer son retour dans ces conditions sera :

$$\Delta E = \Delta E_c = \frac{1}{2}m\left({v_1}^2 - {v_o}^2\right) = \frac{1}{2}mg_o\frac{R^2}{r_o}\left(\frac{R}{r_o} - 1\right)$$

11. Rentrée d'un satellite dans l'atmosphère :

1°) La troisième loi de Kepler donne : $\dfrac{R^3}{T^2} = \dfrac{GM}{4\pi^2}$ avec T = 1 h 30 = 5400 s ;

on trouve R = 6660 km et donc $H = R - R_o = 260$ km.

2°) a) Le TMC s'écrit pour le satellite, dans le référentiel géocentrique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = r\overrightarrow{u_r} \wedge \left(-\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{u_r} - k\vec{v} \right) = -kr\overrightarrow{u_r} \wedge \vec{v} = -\frac{k}{m}\vec{L}$$

b) Le moment cinétique conserve donc toujours la même direction, puisque sa variation est colinéaire à lui-même. Comme $\vec{L} = r\overrightarrow{u_r} \wedge m\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$, le vecteur position reste orthogonal à la direction du moment cinétique et donc le mobile M évolue dans le plan orthogonal à $\vec{L}$ passant par le centre d'attraction O.

c) En projetant le TMC sur l'axe qui porte $\vec{L}$, et en intégrant par rapport au temps, on tire :

$$L(t) = L(0).\exp\left(\frac{-kt}{m}\right).$$

On a une décroissante exponentielle caractérisée par une constante de temps $\tau = m/k$.

Si le frottement est suffisamment faible, donc si τ est grand, le DL1 de L(t) donne : $L(t) \approx L(0)(1 - t/\tau)$ (1)

d) Si la trajectoire est quasi-circulaire, on a par approximation :

$\vec{L} = r\overrightarrow{u_r} \wedge m\vec{v} = mrv\vec{u}$ avec $L(0) = mr_ov_o$.

L'équation (1) donne alors : $rv = r_ov_o.(1 - t/\tau)$ (2)

Il nous faut établir une autre relation entre vitesse et rayon.

En écrivant la RFD, dans l'approximation consistant à considérer la trajectoire comme quasi-circulaire, on a en projection sur la direction radiale : $mv^2/r = GMm/r^2$

donc $rv^2 = GM =$ cste.

Il vient donc : $rv^2 = r_o.v_o^2$ (3)

En élevant cette équation au carré et en la divisant par l'équation (2), on tire finalement : $r = r_o.(1 - 2\,t/\tau)$.

Il est aussi possible d'écrire directement l'expression de la vitesse en orbite circulaire : $v = \sqrt{GM/r}$, puis en restant sur le modèle de l'orbite quasi-circulaire d'expliciter $L = m.r.v = m.r\sqrt{GM/r} = m.\sqrt{GM.r}$. Il vient donc $r(t) = L^2/(m^2GM)$ qui mène avec $L = L(0)(1 - t/\tau)$ au même résultat au premier ordre : $r = r_o.(1 - 2\,t/\tau)$.

e) Sur une période, $\Delta r = -2r_o.T/\tau$, ce qui amène : $\tau = 22000$h $\approx 2{,}5$ ans.

Ceci justifie bien a posteriori les approximations faites sur la quasi-circularité de l'orbite.

f) Comme $r.v = r_o.v_o(1 - t/\tau)$ et $r = r_o(1 - 2t/\tau)$, on tire, en faisant le rapport des deux équations et par un DL1 en t/τ : $v = v_o(1 + t/\tau)$

Du fait des frottements, la vitesse va augmenter, car par ailleurs l'altitude va décroître.

En se référant aux expressions des énergies (écrite par approximation pour un mouvement circulaire) :

$E_c = GMm/2r$ (car par la RFD $v^2/r = GM/r^2$) ; $E_p = -GMm/r$ et $E = -GMm/2r$.

On a donc $E = -E_c$, donc les frottements qui amènent une variation de l'énergie mécanique $dE < 0$, entraîne une variation $dE_c > 0$, mais aussi une variation d'énergie potentielle $dE_p = -2.dE_c > 0$.

La variation de E avec le temps s'obtient (au premier ordre en t/τ) en introduisant $r = r_o(1 - 2t/\tau)$ dans l'expression de l'énergie mécanique et en faisant un DL1.

Il vient finalement : E = $\dfrac{-GMm}{2r_o}\left(1+\dfrac{2t}{\tau}\right)$

Sur un tour, donc pour Δt = T, on aura ΔE = $\dfrac{-GMm}{2r_o}\left(\dfrac{2\Delta t}{\tau}\right)$=-4260 kJ.

g) L'énergie dissipée par frottement se dissipe par transfert thermique sur le nez de la navette spatiale ou du module de retour, ce qui amène un échauffement des tuiles de protection en céramique.

Le bilan sur la durée d'un tour est : ΔE + mcΔT = 0 d'où une élévation de température ΔT = 40 °C. Le calcul néglige cependant la dissipation d'énergie par convection et rayonnement, donc exagère la valeur de ΔT.

12. Lancement raté d'un satellite.

1°) par la RFD : $V_O = (GM/r_O)^{1/2}$.
p = C^2/GM (par la 2° formule de Binet) soit comme C = σ / m = $r_O V_O \cos\alpha$, p = $r_O \cos^2\alpha$.

2°) Calculer E vues les conditions initiales. On déduit a = r_o d'où e = $|\sin\alpha|$.

autre méthode : En dérivant l'équation polaire par rapport au temps, et compte tenu des conditions initiales et de C = $r^2\dot{\theta}$: $e.\sin\theta_O/p = -\tan\alpha/r_O$. Par ailleurs l'équation polaire donne : $e.\cos\theta_O = (1/p) - (1/r_O) = \tan^2\alpha/r_O$. D'où e = $|\ \sin\alpha\ |$.

En utilisant l'équation polaire de l'ellipse : $r_a = p/(1 - e)$ et $r_p = p/(1 + e)$. C = $r_a.v_a = r_p v_p = r_o V_o.\cos\alpha$ d'où v_a et v_p.

3°) 3° Loi de Kepler. T et T_o identiques. T = $8{,}61.10^4$s