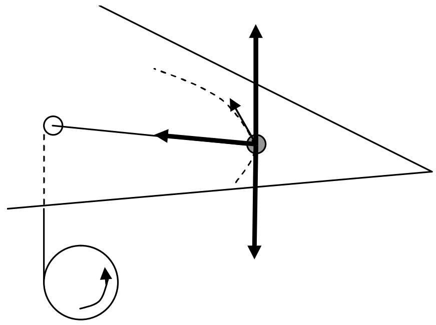
Lois du moment cinétique

1. Conservation du moment cinétique :



a) Le point M est astreint à évoluer sur le plan. La distance r = OM va graduellement diminuer, à mesure de l'enroulement du fil sur le tambour. Le poids de M(m) est compensé par la réaction du support ; le mobile n'est donc finalement soumis qu'à la tension du fil, de direction (OM). Avec un peu d'intuition, on peut prévoir que la vitesse du mobile va augmenter durant ce processus (voir (b)).
Ecrivons le TMC pour M(m), au niveau du point fixe O. La résultante des forces étant constamment dirigée selon (OM), son moment en O est nul.
Donc :

$$\frac{d\,\overrightarrow{\sigma_O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OM} \wedge (m\,\vec{g} + \vec{R}) = \vec{0}$$

le mouvement a lieu avec un moment cinétique constant.

Remarque : La conservation du moment cinétique confirme un mouvement plan : le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est à tout instant orthogonal au vecteur moment cinétique $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\vec{v}$. Donc M évolue dans le plan orthogonal à ce vecteur de direction fixe, passant par O.

En écrivant ce moment cinétique sur la base polaire située dans le plan du mouvement :

, en explicitant le moment cinétique en coordonnées polaires : $\vec{\sigma}_O = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}$

Il vient :

$$\dot{\theta} = \frac{\sigma_O}{mr^2}$$

. A mesure que r va décroître, la vitesse angulaire va donc augmenter, de façon à maintenir σ_O = cste.

a) b) Le treuil enroulant le fil à vitesse constante, la valeur de r évolue selon : $r(t) = L_o - R.\Omega.t = L_o - A.t$

D'après ce qui précède, on aura donc :

$$\dot{\theta} = \frac{\sigma_O}{m(r_o - A.t)^2}$$

où $\sigma_O = mr_o.v_o$

soit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r_o v_o}{(r_o - A.t)^2}$$

qui s'intègre par rapport au temps en donnant la loi horaire sur θ(t) :

$$\theta(t) = \frac{1}{A}\frac{r_o v_o}{r_o - A.t} + cste$$

La vitesse du mobile sera : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = -A\,\vec{e_r} + \frac{r_o v_o}{r_o - A.t}\vec{e_\theta}$

b) On explicite l'équation polaire r(θ) en éliminant le temps dans le système d'équations paramétrées :
$r(t) = r_o - A.t$;

$$\theta(t) = \frac{1}{A}\frac{r_o v_o}{r_o - A.t}$$

A une constante près. Posons $\theta(0) = 0$, et donc cste = $-v_o/A$.

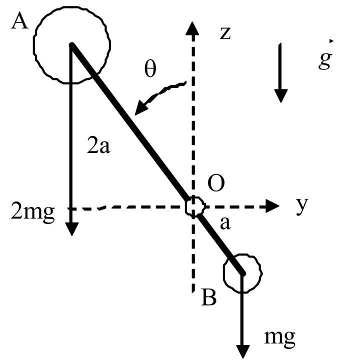
Il vient :

$$\theta(r) = \frac{1}{A}\frac{r_o v_o}{r} - \frac{v_o}{A}$$

et donc l'équation polaire :

$$r(\theta) = \frac{r_o v_o}{A.\theta + v_o}$$

2. Pendule avec frottement :



Ecrivons le TMC au point O : $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{Oext}}$

Les actions extérieures correspondent aux poids des deux masses, à la réaction du support et au frottement (au niveau de la liaison, et dans l'air).

La réaction du support peut être vue comme une force dont la droite d'action passe par O, donc de moment nul. Les frottements se traduisent par un couple de frottement de moment : $\vec{C} = -h\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_x}$.

Enfin, les moments des poids sont :

$\overrightarrow{OA} \wedge 2m\vec{g} = 4mga\sin\theta\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{OB} \wedge m\vec{g} = -mga\sin\theta\,\overrightarrow{e_x}$

Le système va tourner autour de l'axe (Ox) avec une vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$.

Son moment cinétique sera :

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OA} \wedge 2m\overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{OB} \wedge m\overrightarrow{V_B} = 2a.2m.2a\dot{\theta}\overrightarrow{e_x} + a.m.a\dot{\theta}\overrightarrow{e_x} = 9ma^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_x}$$

Le TMC s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}\left(9ma^2\dot{\theta}\right)\overrightarrow{e_x} = 3mga\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} - h\dot{\theta}\overrightarrow{e_x}$$

soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{9ma^2}\dot{\theta} - \frac{g}{3a}\sin\theta = 0$$

.

Si θ reste proche de π, on peut envisager un DL1 de sinθ au voisinage de π ; par la formule Taylor : $\sin\theta \simeq \sin\pi + (\theta - \pi).\cos\pi$ soit $\sin\theta \simeq -(\theta - \pi)$

Dans ces conditions, il vient pour équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{9ma^2}\dot{\theta} + \frac{g}{3a}(\theta - \pi) = 0$$

soit en posant $\varepsilon = \theta - \pi$:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{h}{9ma^2}\dot{\varepsilon} + \frac{g}{3a}\varepsilon = 0$$

Equation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti, dont l'étude est classique.

Cela mène, dans le cas d'un frottement faible, à des oscillations amorties autour de la position θ = π.

A titre de révision, on peut donner la résolution complète : EC : $r^2 + \frac{h}{9ma^2}r + \frac{g}{3a} = 0$ de discriminant : $\Delta = \left(\frac{h}{9ma^2}\right)^2 - 4\frac{g}{3a} < 0$ dans l'hypothèse où h est faible.

On aura des oscillations de pseudo pulsation :

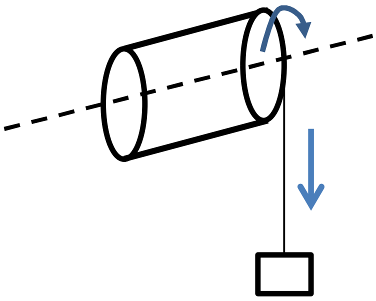
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{3a} - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{9ma^2}\right)^2} \simeq \sqrt{\frac{g}{3a}}$$

Dans les conditions initiales envisagées :

$$\theta(t) \simeq \theta_o \, exp\left(\frac{-h}{18ma^2}t\right) cos(\omega t)$$

3. Mouvement d'un cylindre :

Un cylindre peut tourner librement autour de son axe horizontal Δ qui est fixe par rapport au référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à Δ est J ; son rayon est R.



Le mouvement du cylindre sera décrit par le TMC écrit sur l'axe de rotation Δ. Le moment du poids du cylindre est nul (son centre d'inertie est situé sur l'axe),la liaison pivot étant parfaite, il n'y a pas de moment de la réaction de liaison. Seul s'applique le moment de la tension du fil ; Il vient : $J\ddot{\theta}$ = R.T

Le fil, inextensible et de masse négligeable est enroulé autour du cylindre, les mouvements du cylindre et de la masse m suspendue au fil sont liés : z = R.θ en plaçant l'origine de z et de l'angle θ de façon à ce que la longueur initiale de fil pendant verticalement L_o corresponde à z = 0 et θ = 0.

En dérivant deux fois la relation entre z et θ, il vient : $\ddot{z} = R\ddot{\theta}$

Le corps de masse m est attaché à l'extrémité libre de ce fil. Son mouvement est décrit par la RFD, en projection sur l'axe vertical (Oz) :

$$m\ddot{z} = mg - T$$

(*attention, la tension du fil n'est pas égale au poids de la masse m !).*

On tire : $T = mg - m\ddot{z} = mg - mR\ddot{\theta}$

donc :

$$J\ddot{\theta} = mgR - mR^2\ddot{\theta}$$

d'où finalement : $\ddot{\theta} = mgR/(J + mR^2)$

4. Mise en route d'une machine tournante. Intérêt du volant.

4.1) Régime transitoire :
Initialement immobile (ω (0) = 0), une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe est soumise à partir de l'instant t = 0 à l'action d'un couple moteur de moment $\Gamma = \Gamma_0$ constant.

Etudier le mouvement de la machine en supposant que l'ensemble des forces de frottement a un moment de la forme - kω. Analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire en régime permanent ainsi que le *temps de relaxation* τ du système. Donner l'expression de ω / ω_0 en fonction de t / τ et décrire l'évolution.

Le TMC sur l'axe de la machine donne : $J.d\omega/dt = \Gamma_o - k.\omega$ (1)
Lorsque le régime permanent est atteint, $d\omega/dt = 0$ et donc : $\omega = \omega_o = \Gamma_o / k$.

L'équation (1) se met sous la forme canonique : $d\omega/dt + (k/J).\omega = \Gamma_o /J$;
l'analyse dimensionnelle montre que le facteur k/J est l'inverse d'un temps, faisant ainsi apparaître le temps de relaxation τ comme : $\tau = J/k$.

La résolution de l'équation différentielle, compte tenu de la condition initiale $\omega(t = 0) = 0$ donne : $\omega(t)/\omega_o = 1 - \exp(-t/\tau)$.
La vitesse angulaire ω va croître progressivement vers sa valeur limite ω_o, qui sera pratiquement atteinte au bout d'une durée de l'ordre de quelques τ ($\omega = 0,99.\omega_o$ pour $t = 5.\tau$)

4.2) Influence d'une vibration :
Le TMC appliqué à la machine donne cette fois :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma_o.(1 + \eta.\cos(\Omega t)) - k.\omega$$

On injecte une solution ω(t) de forme : $\omega(t) = \omega_o.(1 + \epsilon(t))$
soit :

$$J\omega_o\frac{d\epsilon}{dt} = \Gamma_o + \Gamma_o.\eta.\cos(\Omega t) - k.\omega_o - k.\omega_o.\epsilon(t)$$

soit, vu le résultat de la question précédente :

$$J\omega_o\frac{d\epsilon}{dt} = \Gamma_o.\eta.\cos(\Omega t) - k.\omega_o.\epsilon(t)$$

ou

$$J\omega_o\frac{d\epsilon}{dt} + k.\omega_o.\epsilon(t) = \Gamma_o.\eta.\cos(\Omega t) \ \ (2)$$

Cette équation différentielle linéaire sur $\epsilon(t)$ admet une solution qui apparaît comme la somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre, dont on va vérifier qu'elle est de forme $\epsilon(t) = \alpha.\cos(\Omega t - \phi)$,et de la solution de l'équation homogène :

$$J\frac{d\epsilon}{dt} + k.\epsilon(t) = 0$$

Cette solution s'écrit : $\epsilon(t) = \lambda.\exp(-k/J)$ et décroît de façon monotone vers 0. Au bout de quelques durées $\tau = J/k$, ce terme sera négligeable.

La détermination des paramètres α et ϕ de la solution sinusoïdale se fera aisément en employant la notation complexe.
Posons : $\underline{\epsilon} = \alpha.\exp(i.\Omega t).\exp(i.\phi)$ et écrivons le second membre de l'équation (2) sous forme d'une grandeur complexe associée $\Gamma_o.\eta.\exp(i\Omega t)$
Il vient :

$$i.J\Omega\underline{\epsilon} + k..\underline{\epsilon} = \Gamma_o.(\frac{\eta}{\omega_o}).\exp(i\Omega t) \ \ (2')$$

dont on tire :

$$\underline{\epsilon} = \frac{\Gamma_o.(\frac{\eta}{\omega_o})}{i.J\Omega + k}\exp\,(i\Omega t)$$

soit

$$\alpha.\exp(i\varphi) = \frac{\Gamma_o.(\frac{\eta}{\omega_o})}{i.J\Omega + k}$$

donc finalement :

$$\alpha = \frac{\Gamma_o.(\frac{\eta}{\omega_o})}{\sqrt{(J\Omega)^2 + (k)^2}} \quad et \quad \varphi = -atan\left(\frac{J\Omega}{k}\right)$$

3) <u>Rôle d'un volant d'inertie</u> :

On adjoint aux parties tournantes d'une machine un anneau massif et de grand rayon appelé *volant d'inertie*, car ainsi on augmente son moment d'inertie J. Ceci a pour effet de stabiliser sa vitesse de rotation ω : les variations qu'elle pourrait subir, représentées par le terme en Є, seront d'autant plus faibles. Remarquons, que la vitesse de fonctionnement permanent ω_o n'est pas affectée par la grandeur d'inertie J.

En contrepartie, l'accès au régime permanent sera plus long (phase d'accélération) d'après la première question.

5. Chute d'un arbre.

5.1 Etablissons l'équation du mouvement de la chute de l'arbre. Pour ce, on écrit le TMC en projection sur l'axe de rotation Δ, axe horizontal passant par le point O situé à la base de l'arbre. En fait, on traite le problème de façon analogue au cas d'une barre homogène qui tournerait selon une liaison pivot parfait située à son extrémité.

Il vient :

$$J\ddot{\theta} = mg\left(\frac{L}{2}\right).sin\theta$$

en considérant que le poids s'applique au centre de gravité de l'arbre, situé à mi-hauteur.

En multipliant par le facteur intégrant $\dot{\theta}$:

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} = mg\left(\frac{L}{2}\right).sin\theta\dot{\theta}$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\left(J\dot{\theta}^2/2\right) = \frac{d}{dt}\left(-mg\left(\frac{L}{2}\right).cos\theta\right)$$

En intégrant entre (t = 0, θ = θ_o, $\dot{\theta} = 0$) et (t, θ, $\dot{\theta}$) :

$$\left(J\dot{\theta}^2/2\right) = \left(-mg\left(\frac{L}{2}\right)\right).(cos\theta - cos\theta_o)$$

5.2 Comme J = mL²/3, sa vitesse angulaire s'écrit finalement :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(cos\theta_o - cos\theta)}$$

5.3 En réécrivant cette relation sous la forme :

$$dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{3g}{L}}}\frac{d\theta}{\sqrt{(cos\theta_o - cos\theta)}}$$

On détermine le temps de chute de l'arbre par intégration.

avec l'intégrale définie :

$$\int_{\theta=5°}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{(cos\theta_o - cos\theta)}} = 5,1$$

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{\frac{3g}{L}}}.5,1$$