Mouvement de particules chargées dans des champs électriques ou magnétiques.

1. Une expérience relativiste au lycée ?

a) Déflexion par le champ magnétique de l'aimant sous l'action de la force magnétique. La trajectoire s'enroule autour des lignes de champ magnétique.

b) En reprenant la démarche vue en cours (RFD, hypothèse d'une trajectoire circulaire...) ;
$R = (mv) / (eB)$, avec $v = (2eU/m)^{1/2}$ (voir cours). R = 8,91 cm.

c) $v_{class} = 4,19.10^7$ m.s^{-1} ; $v_{relat} = 4,16.10^7$ m.s^{-1} . La limite v = 0,10.c est atteinte pour U = 2560 V.

d) Ecart de 1%

2. Cyclotron de Lawrence :

1°) a) Le champ magnétique amène une déflexion selon une trajectoire circulaire, le champ électrique accélère les ions à la traversée de l'espace entre les dees. La vitesse augmente à chaque traversée, et le rayon du demi-cercle parcouru dans le dee suivant augmente puisqu'il dépend de la vitesse selon : $R = mv/qB$. On obtient donc une trajectoire en spirale, plus exactement une succession de demi cercles de rayons croissants, reliés par des portions rectilignes à la traversée de l'espace entre électrodes.

b) La tension accélératrice doit s'inverser à chaque demi-tour, afin d'agir dans le sens d'une augmentation de la vitesse des particules à chaque demi-tour. Cette tension doit donc avoir même périodicité que le mouvement circulaire dans le champ magnétique, donc une fréquence de valeur $f_{cy} = eB/(2\pi m_p)$.

2°) a) L'énergie fournie aux protons se traduit par leur énergie cinétique E_c = 1,2 MeV, ce qui donne $v = 1,52.10^7$m.s^{-1} en employant l'expression classique : $E_c = mv^2/2$
b) $U_{acc} = 1,2.10^6$ V.
c) f_{cy} = 17,2 MHz.
d) La tension accélératrice étantde 4 kV, pour atteindre une énergie de 1,2 MeV, il faudra : $N = 1,2.10^6/(2 \times 4.10^3) = 150$ tours (2 accélérations par tour).
e) B = 1,13 T.

3. Interactions entre particules chargées.

a) On envisage l'interaction entre deux particules chargées A, de charge q et B de masse m et de charge -q. On communique à B, située à une distance d de A à l'instant initial, une vitesse initiale v_O, de direction radiale par rapport à A.

Ecrivons la conservation de l'énergie mécanique :
à l'état initial, A est immobile et B est mobile, de vitesse v_o.
L'énergie d'interaction électrostatique entre ces deux charges distantes de d vaut alors $E_p = -q^2/(4\pi\varepsilon_o d)$.
$E_m = mv_o^2/2 - q^2/(4\pi\varepsilon_o d)$.

A l'état final, L'énergie électrostatique est nulle car A et B sont infiniment éloignés, et l'énergie cinétique de A doit être positive ou nulle. Donc $E_m > 0$ (ou $E_m = 0$ à la limite).
D'où la valeur v_O minimale pour que B échappe à l'interaction avec A : $v_o > q/(2\pi\varepsilon_o md)^{1/2}$

b) On envisage maintenant une particule B', de masse m et de charge +q, projetée en direction de A avec une vitesse initiale v_O, B' étant initialement à une distance d de A.

Il est impossible que B', supposée ponctuelle, rencontre A car ceci amènerait une distance entre A et B tendant vers 0 et donc une énergie d'interaction électrostatique infinie.

La distance minimale d'approche des deux particules se calcule par un bilan d'énergie mécanique, qui doit se conserver : $E_m = mv_o^2/2 + q^2/(4\pi\varepsilon_o d)$ à l'état initial.

A la distance minimale d_m , la vitesse de B s'annule : $E_m = + q^2/(4\pi\varepsilon_o d_m)$

d'où $1/d_m = (1/d) + (2\pi\varepsilon_o m v_o^2/q^2)$.

4. Expérience de Tonomura :

a) $v = 1{,}30.10^8$ m.s^{-1} ; par le calcul relativiste $v = 1{,}23.10^8$ m.s^{-1} .

b) $I = \delta Q/dt = 1{,}6.10^{-16}$ A ; représente 1 électron par ms.
La distance D est parcourue en $D/v = 1{,}2.10^{-8}$ s.

c) $p = \gamma mv$ et $\lambda = h/p = 5{,}3.10^{-12}$ m.

d) $i = \lambda.L/a = 2{,}7$ µm.

5. Particule chargée dans des champs croisés ; Filtre de Wien :

5.1 Le système est évidemment la particule chargée de charge q et de masse m. Le référentiel est celui d'observation, supposé galiléen.
Les forces appliquées se réduisent à la force de Lorentz, d'expression : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$. Le poids est négligé.
On a $\vec{E} = E\vec{e_y}$ et $\vec{B} = B\vec{e_z}$. La force de Lorentz n'a donc pas de composante colinéaire à $\vec{e_z}$ puisque le terme électrique est porté par $\vec{e_y}$ et que, d'après la définition du produit vectoriel, le terme magnétique est orthogonal à $\vec{e_z}$.
Le profection de la R.F.D. : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ sur la direction de (Oz) conduit donc à $\ddot{z} = 0$.

Par une première intégration, on a donc $\dot{z} = cste = 0$ vue la condition initiale sur la vitesse ;

puis $z = cste = 0$ vue celle sur la position.
Le mouvement se déroule donc intégralement dans le plan (Oxy).

Explicitons la RFD sur la base cartésienne :

$$\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} + \frac{q}{m} \begin{vmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} B\dot{y} \\ E - B\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

posons : ω = qB/m

On doit donc résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{y} \\ \ddot{y} = \omega \dfrac{E}{B} - \omega \dot{x} \end{cases}$

En intégrant, et en tenant compte que la vitesse initiale est nulle : $\begin{cases} \dot{x} = \omega y \\ \dot{y} = \omega \dfrac{E}{B} t - \omega x \end{cases}$

On peut alors intégrer le système en posant : X = x + i.y (i² = -1).

Le système devient une équation unique sur la variable complexe X : $\dot{X} + i\omega.X = i\omega \frac{E}{B} t$ (1)

Solution générale de l'équation sans second membre : $X_1 = A\exp(-i\omega t)$ où A est une constante d'intégration.

Solution particulière de l'équation complète : de forme $X_2 = \lambda t + \mu$ avec par identification dans l'équation (1) : $X_2 = \frac{E}{B} t + i \frac{E}{B\omega}$

En faisant jouer la condition initiale sur la position, cela impose X(0) = 0 pour la solution générale de l'équation complète : $X = X_1 + X_2 = A\exp(-i\omega t) + \frac{E}{B} t + i \frac{E}{B\omega}$

soit donc $A + i\frac{E}{B\omega} = 0$

D'où finalement en séparant partie réelle (x) et imaginaire (y) :

$$x = \frac{E}{B} t - \frac{E}{B\omega} \sin \omega t$$
$$y = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t)$$

cette trajectoire est une cycloïde.

5.2. La condition :

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \left(\frac{q}{m}\right) \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$$

amène, vue la géométrie pour laquelle les champs électriques et magnétique sont orthogonaux, avec une vitesse orthogonale au champ magnétique : v = E/B.

6. Particules chargées dans des champs parallèles :

Le système est évidemment la particule chargée de charge q et de masse m. Le référentiel est celui d'observation, supposé galiléen.

Les forces appliquées se réduisent à la force de Lorentz, d'expression : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$. Le poids est négligé.

On a $\vec{E} = E\overrightarrow{e_y}$ et $\vec{B} = B\overrightarrow{e_y}$.

Explicitons la RFD sur la base cartésienne :

$$\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{q}{m} \begin{vmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{q}{m} \begin{vmatrix} -B\dot{z} \\ E \\ B\dot{x} \end{vmatrix}$$

posons : ω = qB/m

On doit donc résoudre le système différentiel : $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega \dot{z} \\ \ddot{z} = \omega \dot{x} \end{cases}$

auquel s'adjoint l'équation différentielle indépendante : $\ddot{y} = \omega \dfrac{E}{B} = \dfrac{qE}{m}$

Cette dernière équation s'intègre en deux intégrations temporelles, et compte tenu des conditions initiales en vitesse et position en : $y(t) = \omega \dfrac{E}{B}\dfrac{t^2}{2} = \dfrac{qE}{m}\dfrac{t^2}{2}$

Le système peut se résoudre en introduisant la variable complexe : X = x + i.z.

Il vient en additionnant la première équation du système à la seconde, après avoir multiplié celle-ci par i : $\ddot{X} = i\omega \dot{X}$

Cette équation s'intègre un première fois en : $\dot{X} = i\omega X + V_o$ vues les conditions initiales amenant $\dot{X}(0) = V_o$ et $X(0) = 0$.

Une seconde intégration amène : $X(t) = X_o \exp(i\omega t) - \dfrac{V_o}{i\omega}$.

La condition initiale $X(0) = 0$ impose $X_o \exp(i\omega t) = \dfrac{V_o}{i\omega} = -i\dfrac{V_o}{\omega}$

On déduit donc finalement : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{V_o}{\omega}\sin \omega t \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 \\ z(t) = \dfrac{V_o}{\omega}\left(1 - \cos \omega t\right) \end{cases}$

La courbe décrite est une "hélice" de pas variant comme t², tracée sur un cylindre d'axe parallèle à (Oy) de rayon mV_O/qB. Les résultats obtenus ne sont plus valides à partir de v > 0,1.c (c = 3.10^8 m/s)). Il faut alors employer les équations de la mécanique relativiste.