Cinématique

1. Un peu de trigonométrie :

a) Un Airbus est dans la phase ascensionnelle suivant son décollage. Il a une vitesse de 350 km/h et est cabré d'un angle de 30° par rapport à l'horizontale. Quelle est sa vitesse ascensionnelle, en $m.s^{-1}$?

b) Un terrain constructible a une surface cadastrale (surface projetée sur un plan horizontal) S_{cad} de 1000 m². Il a une forme rectangulaire, de proportions 50 mx20m, son plus petit côté étant horizontal. Il est situé sur une côte dont la pente moyenne est de 20%. Quelle est la dénivelée Δz sur l'ensemble du terrain ? Quelle est la surface au sol S_{sol} ?

c) On mesure la longueur L = 10,0 m de l'ombre d'un arbre, estimée depuis le centre de son pied, le 21 juin à midi, à Dijon (latitude λ = 47,33°N).
L'inclinaison de l'axe de la Terre est de ϕ = 23°27'. Quelle est la hauteur h de l'arbre ? Quelle sera la longueur de l'ombre le 21 décembre à midi ?

Réponses : a) 175 $km.h^{-1}$ = 48,6$m.s^{-1}$; b) Δz = 10 m ; angle α = atan(0,2) par rapport au sol ; S_{sol} = 1020 m² ; c) Eté : $L = h.\tan(\lambda - \phi)$ hiver. $L = h.\tan(\lambda + \phi)$; h = 22,6 m, L = 64,8 m

2. Dépassement :

Une voiture A de longueur d = 4,0 m suit un camion de longueur D = 10 m à la vitesse constante v_0 = 72 $km.h^{-1}$ sur une route droite et horizontale.
La distance entre l'avant de la voiture et l'arrière du camion est alors L = 35 m. A un instant pris comme origine des dates, le conducteur de la voiture décide de doubler le camion et impose à son véhicule une accélération constante a = 3,0 $m.s^{-2}$. On prendra comme origine du repère la position de l'avant de la voiture au début du dépassement.

1. Établir l'équation horaire x(t) du mouvement de l'avant de la voiture ainsi que celle du mouvement de l'avant du camion, X(t).
2. Si on considère que le dépassement est terminé quand l'arrière de la voiture est 20 m devant l'avant du camion, calculer la durée du dépassement ainsi que la distance parcourue par le camion pendant ce temps.

3. Jet d'eau :

Le bec de sortie d'une fontaine est horizontal. La vitesse de sortie v de l'eau correspond à un débit D de 40 litres par minutes, sur une section S de 2,0 cm de diamètre. On donne la relation : D = v S.

Le jet d'eau atteint le bassin de réception après une dénivelée h = 80 cm.

La trajectoire du jet est assimilable à celle d'un point matériel évoluant dans les mêmes conditions. On note g le module du champ de pesanteur. Calculer l'angle α entre le vecteur-vitesse et le plan horizontal au niveau du point d'arrivée du jet dans le bassin.

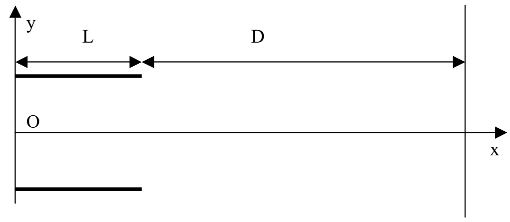
4. Accélération subie dans un mouvement de rotation à vitesse constante.

a) Calculer numériquement l'accélération subie par un pilote de chasse lorsque son avion effectue un virage de 1000 m de rayon, à Mach 1 (soit $1{,}06.10^3$ $km.h^{-1}$).

b) Calculer l'accélération et la vitesse correspondant au mouvement d'un point M de la surface terrestre, de latitude λ vu dans le référentiel géocentrique (la latitude est l'angle que fait le rayon OM reliant M au centre O de la Terre avec le plan équatorial). La Terre fait 1 tour par jour sidéral (86164 s) dans ce référentiel. Application numérique pour un point de l'équateur. Le rayon terrestre vaut $6,4.10^3$ km.

R : a) $a = 86,7\ m.s^{-2} \approx 9\ g$ ($g = 9,81\ m.s^{-2}$). b) $a = 3,4.10^{-2}\ m.s^{-2}$.

5. Tube cathodique :



Une particule de charge q (électron) pénètre en O

(x = 0, y = 0) avec une vitesse initiale $\vec{v_o} = v_o \vec{e_x}$ dans l'espace situé entre deux plaques conductrices soumises à une tension U. Il subit alors une force électrostatique constante de module F = qU/d où d est la distance entre les plaques, dirigée selon $\vec{e_y}$.

Cette force lui impose donc une accélération $\dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{qU}{md}\vec{e_y}$ tant que la particule circule entre les plaques, de longueur L. La pesanteur joue un rôle négligeable dans ce problème.

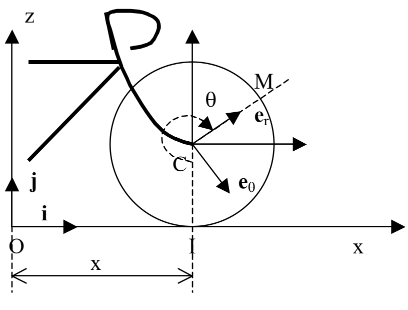
Déterminer la vitesse $\vec{v_S}$ et la position S de sortie des plaques. Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire (OS) est celle d'une parabole.

Un écran est disposé à une distance D de la sortie des plaques. Quelles seront les coordonnées du spot P correspondant à l'impact de l'électron sur l'écran ?

R : $\overrightarrow{OS} = L\ \vec{e_x} + (L/v_o)^2.\ qU/(2m.d)\ \vec{e_y}$; $\vec{v_S} = v_o\ \vec{e_x} + (L/v_o).\ qU/(m.d)\ \vec{e_y}$;

$y_P = y_S + (DL/v_o^2).\ qU/(m.d)$.

6. Roue de vélo :



Un vélo roule sur une route horizontale, à la vitesse constante v_o

On examine le mouvement d'un point M périphérique d'une des roue, par rapport au sol. La roue est de centre C, de rayon R connu. On note I le point de contact de la roue sur la route.

a) Exprimer la vitesse de M par rapport au sol, dans la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ et dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j})$.
b) Pour que la roue ne dérape pas, il faut que la vitesse de tout point M de la bande de roulement du pneu soit nulle lorsqu'il vient en contact avec le sol (en I).
Donner la relation nécessaire entre v_o et $\omega = \dot{\theta}$ dite condition de non glissement.
c) Tracer l'allure de la trajectoire de M.
d) Calculer l'accélération de M.

7. Le bon braquet :

Un vététiste pédale à la cadence de 60 tours par minute. Il est sur un braquet de 12 x 50, ce qui signifie que le rapport du diamètre de son pignon au diamètre de son plateau est de 12/50 (ces valeurs correspondent au nombre de dents des roues dentées reliées par la chaîne). Le diamètre de la roue est de 700mm. Quelle est la vitesse du vélo ? Quel est le développement (distance parcourue pour 1 tour de pédale) ? Le nombre de tour par minute du pignon ?

8. Convoyeur hélicoïdal :

Un convoyeur hélicoïdal permet le transport rapide de charges lourdes.

Ses caractéristiques techniques donnent un rayon moyen de R = 1,00 m, 10 tours, un pas de h = 1,50 m par tour.

Le mouvement d'un colis passant dans le convoyeur est assimilé à celui d'un point de position M défini en coordonnées cylindriques, (r, θ, z) par les équations paramétrées suivantes : $r = R$; $\theta = \omega t$; $z = a t$ où R, ω et a sont des constantes et t est le temps. La trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre circulaire.

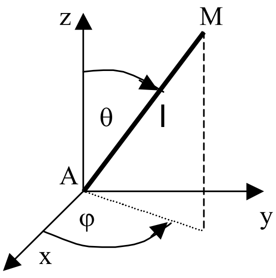
Le pas h de cette hélice est par définition la distance séparant deux positions successives du mobile sur une même génératrice. Etablir la relation entre a et h.

Déterminer le vecteur-vitesse. Montrer qu'il fait un angle α constant avec l'axe (Oz).Calculer tanα . Quelle est la vitesse de la bande transporteuse (dans sa zone médiane) ?

Déterminer le vecteur-accélération. Le mouvement est-il uniforme ? Exprimer la distance s parcourue par le mobile sur sa trajectoire en fonction du temps. Quelle est la durée de transport ?

R : $a = \omega h / 2\pi$; $\vec{v} = R\omega\overrightarrow{e_\theta} + \dfrac{\omega h}{2\pi}\overrightarrow{e_z}$; $\tan\alpha = 2\pi R/h$; $\vec{\gamma} = -R\omega^2\overrightarrow{e_z}$; de $\|\vec{v}\| = \dfrac{ds}{dt}$: $s = \omega t\sqrt{R^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}$

9. barre liée par une rotule :



Une barre est fixée à une rotule à l'une de ses extrémités A, lui permettant toute rotation en ce point. Sa position est repérée par les angles θ et φ. Calculer la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{\gamma}$ de M dans les cas particuliers suivants :

a) le mouvement de M a lieu dans un plan vertical (à φ fixé) ; on explicitera les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ dans la base polaire $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\right)$ puis dans la base cartésienne.

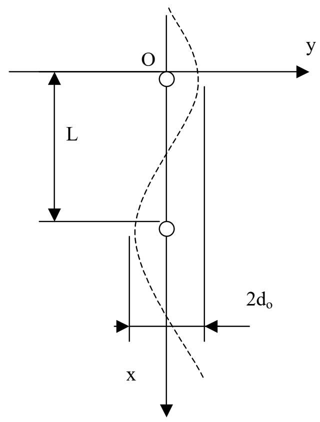
b) le mouvement de M a lieu selon un plan horizontal (à θ fixé). on explicitera de même les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$ dans la base sphérique $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$ puis dans la base cartésienne.

10. Test de stabilité d'une automobile :

Lors d'un tel test, la voiture, repérée par son centre de gravité G de coordonnées (x, y), est astreinte à suivre une trajectoire sinusoïdale sur une piste horizontale en slalomant entre des plots espacés d'une distance L, de manière à conserver à tout moment une vitesse $\dot{x} = v_o = 50$ km.h^{-1}.

Durant le mouvement, la distance minimale entre G et chaque plot est

$d_o = 3{,}0$ m.



1°) Montrer que l'équation y(x) = A.cos(B.x) convient pour décrire la trajectoire et déterminer les valeurs de A et B.

2°) La voiture testée doit tolérer une accélération maximale de 0,7 g

(g = 9,8m.s^{-2}). Avec quel espacement L doit-on disposer les plots ?

*R : Exprimer vitesse et accélération dans la base (**e**$_x$, **e**$_y$) : (penser aux dérivations composées)*

$\vec{v} = v_o\,\vec{e_x} - (\pi/L)\,v_o\,.d_o\sin(\pi x/L)\,\vec{e_y}$; $\vec{\gamma} = -(\pi^2/L^2)v_o^2.d_o.\cos(\pi x/L)\,\vec{e_y}$. ; *Il faut* $L > \pi.v_o(d_o/0{,}7g)^{1/2}$.

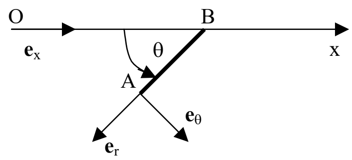
11. Chute libre... sans parachute !

Le cascadeur anglais Gary Connery (ça ne s'invente pas...) a réalisé une performance incroyable le 23 mai 2012 : sauter d'un hélicoptère à 730 m d'altitude et atterrir sans utiliser son parachute… Un matelas de 18000 cartons, d'une longueur de 100m sur 15 m de large et 5 m d'épaisseur lui a servi de piste d'atterrissage. Il était équipé d'une wingsuit (combinaison volante) de façon à ralentir un maximum ça vitesse.
Après quelques turbulences qui ont fait grandement osciller son corps, il est parvenu à garder sa trajectoire et atterrir sans problème dans ce lit de cartons. L'ensemble du saut a duré environ 50 secondes.

Evaluer un ordre de grandeur pour la composante verticale de sa vitesse à l'arrivée. A quelle hauteur de chute, sans la wing-suit, cela correspondrait-il ?
On estime que les cartons se sont écrasés sur 80% de leur épaisseur. La vitesse incidente, à l'arrivée, présentait un angle de l'ordre de 30° par rapport à l'horizontale. Quelle a été la décélération subie dans la direction verticale ? La décélération globale ? Quel est l'aspect présentant la plus grande prise de risque ?

12. Mouvement d'une remorque :

Une remorque, repérée par le point A, est tirée par une voiture (point B). La voiture roule à vitesse constante $\vec{v_o} = v_o\vec{e_x}$ et la liaison entre A et B implique que le point A se déplace à tout instant selon la direction (AB) avec AB = L.



Montrer que : $\vec{v_A} = v_o\vec{e_x} + L\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$ .En déduire une relation différentielle entre t et θ , puis exprimer θ en fonction de t. On donne : $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \ln\left|\tan\frac{\theta}{2}\right|$

R : $\theta = 2.\mathrm{atan}(\exp(-v_o t/L))$.