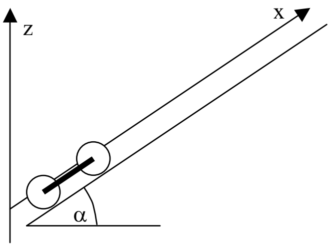
Approche énergétique du mouvement d'un point matériel (Corrigé).



1. Lancer de chariot :

a) Travail du poids : $W_{poids} = \int_A^M m\vec{g} \bullet \vec{dl} = \int_{z_A}^{z_M} -mg.dz$ avec $z_A = 0$ et $z_M = x.\sin\alpha$; donc $W_{poids} = -mgx.\sin\alpha$

Travail du frottement : $W_{frott} = \int_A^M -f.N\vec{e_x} \bullet \vec{dl} = \int_{x_A}^{x_M} -f.Ndx$ où N est le module du terme de réaction normal au support.

En écrivant la RFD et en la projetant sur la direction orthogonale à (Ox), on tire aisément : $N = mg.\cos\alpha$.

Donc : $W_{frott} = -fmg.\cos\alpha.x$

globalement : $W = -mg.x.\sin\alpha - fmg.\cos\alpha.x$;

Lorsque l'altitude maximale est atteinte, la vitesse s'annule (toute l'énergie cinétique initiale aura été consommée par frottement ou accumulée sous forme d'énergie potentielle de pesanteur).

Il suffit d'écrire le TEC entre l'état initial ($z = 0$, $v = v_o$) et l'état final ($z = z_{max}$, $v = 0$) .

On tire alors : $-mv_o^2/2 = -mg.x_{max}.\sin\alpha - fmg.\cos\alpha.x_{max}$ avec $z_{max} = x_{max}.\sin\alpha$

d'où : $z_{max} = (\sin\alpha.v_o^2/2)/(g(\sin\alpha+f.\cos\alpha)$.

b) La variation de l'énergie mécanique $E = E_c + E_p$ correspond au travail des forces non conservatives. Ici $E_p = mgz$ est l'énergie potentielle de pesanteur, et la force non conservative est la force de frottement solide.

$\Delta E = -fmg.\cos\alpha.x_{max}$ avec $z_{max} = x_{max}\sin\alpha$.

et pour les valeurs d'énergie mécanique : $E_{initial} = mv_o^2/2$ et $E_{final} = mgz_{max}$

d'où : $z_{max} = (\sin\alpha.v_o^2/2)/(g(\sin\alpha+f.\cos\alpha)$.

2. Montagnes russes :

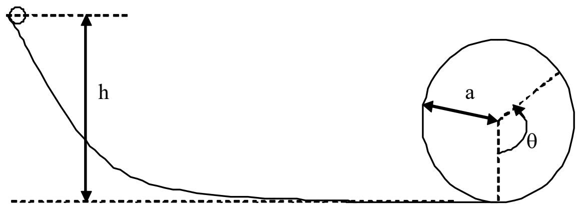
a) Géométriquement : $h = L.\sin\alpha$. Par le TEC : $\Delta Ec = W$, avec $\Delta E_c = mv_o^2/2$ et $W = mgh$ (seul le poids travaille).

Il vient : $vo = (2gL\sin\alpha)^{1/2}$;

b) énergie mécanique en D : 30 % de l'énergie est perdue entre B et C ; de C à D, une partie de l'énergie mécanique va être emmagasinée sous forme d'énergie potentielle de pesanteur, selon la quantité $mg\Delta h$. D'où l'énergie cinétique du véhicule en D : $E_{cD} = 0,7(mv_o^2/2) - mg\Delta h$;

c) Cette énergie doit être consommée par le seul travail de frottement, avec ici une force de frottement de module constant s'opposant au mouvement sur une distance d : $\Delta E = W$ où $W = -F.d$ et $\Delta E = E_{cE} - E_{cD}$ donc $E_{cD} = F.d$.

3. Le looping :
(Particule parcourant une boucle circulaire)



Ecrivons la conservation de l'énergie mécanique (pas de force non conservative dans le problème), entre le point de départ et une position M, repérée par l'angle θ, située sur le cercle de rayon R.

Au point de départ : $v = 0$; $z = h$

en M(θ) : $v = v(\theta)$; $z = a(1 - \cos\theta)$

d'où $E = mgh = mv^2(\theta)/2 + mga(1 - \cos\theta)$ et donc $v^2(\theta) = 2gh - 2ga(1 - \cos\theta)$

Le fait que la particule va rester en contact avec le support correspond à ce que la réaction N, normale au support, ne s'annule pas durant le mouvement sur le cercle. Cette réaction étant orthogonale au déplacement de la particule, il ne faut pas espérer tirer des informations la concernant à partir de considérations énergétiques : elle ne travaille pas.

La RFD donne accès à la réaction N du support. Ecrivons sa projection sur la direction normale au support, c'est-à-dire radiale dans la partie circulaire de la trajectoire :

$$N - mg.\cos\theta = mv^2(\theta)/a$$

où $v^2(\theta)/a$ est l'accélération normale de la particule dans le mouvement circulaire (voir feuille cinématique).

Il vient : $N = 2mgh + 3mga - 2ga.\cos\theta$

N ne doit pas s'annuler même dans la situation la plus défavorable, c'est-à-dire en $\theta = \pi$.
D'où la condition : $N = 2mgh + 3mga - 2ga.\cos\pi > 0$ dont on tire $h > h_{min} = 5a/2$

4. Energie de recul.

1°) La quantité de mouvement de l'ensemble {canon, obus} est initialement nulle (avant le tir).
La conservation d e sa valeur amène : $-M.v_c + m.v_O = 0$

$$\text{donc : } v_c = (m/M).v_O$$

$E_c = mv_c^2/2$ et $E_{cO} = mv_O^2/2$
d'où le rapport de l'énergie cinétique de l'obus à l'énergie cinétique du canon : $Ec_O/Ec = M / m$

2°) a) Ecrire la conservation de l'énergie mécanique.

Etat initial : ressort non comprimé, vitesse du canon : v_c
Etat final : ressort comprimé, avec $\Delta x = d$; vitesse du canon nulle.

$E = mv_c^2/2 = k\Delta x^2/2$ avec $\Delta x = d$ pour $k = k_m$ d'où $k_m = m^2 v_O^2 / Md^2$.

b) Le système n'est plus conservatif.

L'énergie mécanique va subir une variation correspondant à la perte énergétique $-\omega$: $\Delta E = -\omega$.

Le bilan énergétique s'écrit maintenant : $\Delta E = -\omega = k_m d'^2/2 - mv_c^2/2$ soit : $-\omega = k_m d'^2/2 - k_m d^2/2$

dont on tire : $d' = d\sqrt{1 - \frac{2\omega}{k_m d^2}}$

5. Toboggan aquatique (Chute hélicoïdale sans frottements) :

TEC : $\Delta E_c = W$ où seul le poids travaille (réaction du support sans frottements).

En écrivant le TEC entre l'état initial ($z = H$, $v = 0$) et un des états au cours du mouvement ($z = -h\theta + H$, v), on obtient : $\Delta E_c = mv^2/2$ et $W = mgh.(H - H + h.\theta)$

En coordonnées cylindro-polaires : $\vec{v} = a\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} - h\dot{\theta}\,\vec{k}$; d'où $v^2 = \left(a\dot{\theta}\right)^2 + \left(h\dot{\theta}\right)^2 = \dot{\theta}^2\left(a^2 + h^2\right)$

la relation demandée est donc :

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}}.\sqrt{\theta}$$

en retenant la solution de $d\theta/dt > 0$ puisque θ est croissant.

On explicite :

$$dt = \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh}}.\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}$$

d'où par intégration :

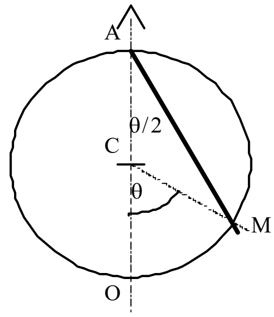
$$\Delta t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh}}.\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh}}.\left[2\sqrt{\theta}\right]_0^{2\pi}$$

soit finalement : $\Delta t = 2\sqrt{\frac{\pi\left(a^2 + h^2\right)}{gh}}$ pour un tour.

Le nombre de tour est déterminé par θ tel que $z = H - h\theta = 0$ soit un nombre $n = (H/h)/2\pi$.

6. Pendule à ressort :

1°) Les actions exercées sur M(m) sont son poids, la réaction du cerceau, radiale (normale au support, pas de frottement) et la force de rappel élastique, dirigée selon (MA).
La résultante de ces forces doit être nulle à l'équilibre.



En projection sur la direction orthoradiale :
$F_\theta = -mg.\sin\theta + k.MA.\sin(\theta/2)$ avec $MA = 2a\cos(\theta/2)$

(L'intérêt de cette expression par projection est que la réaction du support n'y intervient pas).

L'équation d'équilibre s'écrit donc : $F_\theta = 0 = (ka - mg).\sin\theta$

On en déduit deux positions d'équilibre répondant à $\sin\theta = 0$: $\theta = 0$ et $\theta = \pi$

Le cas particulier où les paramètres k, a, met g sont tels que $ka = mg$ amène alors à un système en équilibre indifférent pour toute valeur de θ.

Pour discuter de la stabilité, différentions l'expression de F_θ : $dF_\theta = (ka - mg).\cos\theta.d\theta$
(θ est la seule variable)

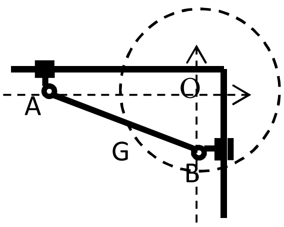
L'équilibre sera instable si dF_θ et $d\theta$ sont de mêmes signes (et inversement).
Si $ka > mg$, l'équilibre est donc instable pour $\theta = 0$ et stable pour $\theta = \pi$;
Si $ka < mg$, l'équilibre est donc instable pour $\theta = \pi$ et stable pour $\theta = 0$;

2°) L'énergie potentielle fait intervenir un terme de pesanteur et un terme de rappel élastique.
$U = mgz + k\Delta l^2/2$ soit donc : $U = (ka - mg)a.\cos\theta + ka^2$. (à une constante près).

Le tracé de U(θ) est d'allure sinusoïdale, présentant un maximum pour $\theta = 0$ et un minimum pour $\theta = \pi$ si $ka > mg$ et au contraire maximum pour $\theta = \pi$ et un minimum pour $\theta = 0$ si $ka < mg$.
La recherche analytique des positions d'équilibre peut aussi se faire par le calcul : on détermine les valeurs de θ pour lesquelles : $dU/d\theta = 0$

Résultats cohérents avec le 1°).

3°) Notons H la hauteur de la porte basculante. G est forcément à mi-distance de A et B. Cela revient à considérer G comme le barycentre des deux points A et B dotés de la même pondération.
A évolue sur l'axe horizontal (liaison glissière) B sur l'axe vertical (liaison glissière), des liaisons pivot au niveau de A et B permettent le mouvement de l'ensemble. On note O l'intersection des axes horizontaux et verticaux passant respectivement par A et B.



Soit α, l'angle (OAB). $x_A = -H.\cos\alpha$; $y_A = 0$ et $x_B = 0$ $y_B = -H.\sin\alpha$.
$x_G = (x_A + x_B)/2 = -H.\cos\alpha/2$ et $y_G = -H.\sin\alpha/2$.

$x_G^2 + y_G^2 = H^2/4$: G parcourt un arc de cercle de centre O et de rayon H/2. Un ressort de rappel permet de maintenir la porte en équilibre quelle que soit sa position.
Le système est conçu pour que la porte puisse être en équilibre indifférent, c'est donc le cas représenté par la relation k = mg dans le modèle précédent qui conviendra : alors U = cste donc dU/dθ = 0 en toutes positions.

4°) Le système est conservatif. Ecrivons la conservation de son énergie mécanique : E = cste = U + mv²/2
avec ici, le mouvement étant circulaire : $v^2 = a^2(d\theta/dt)^2$
En dérivant par rapport au temps l'équation de conservation de l'énergie mécanique, il vient :

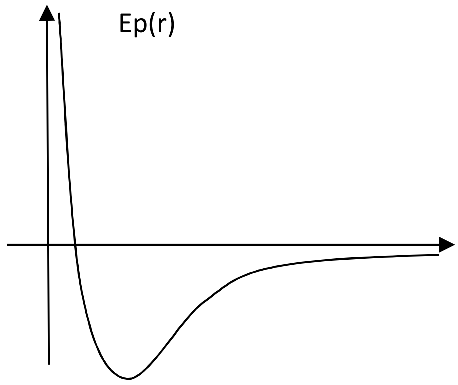
$$2\frac{1}{2}a^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+(1-\alpha)ga\sin\theta.\dot{\theta}=\frac{dE}{dt}=0$$

soit après simplifications : $\ddot{\theta}+(1-\alpha)\frac{g}{a}\sin\theta=0$;

Si le pendule est légèrement écarté d'une position d'équilibre stable, il va osciller autour de cette position, en gardant des valeurs de θ faiblement écartées de cette valeur d'équilibre.
Si θ = 0 est position d'équilibre, on aura θ(t) ≈ 0 sur l'ensemble du mouvement, ce qui permet de linéariser l'équation différentielle du mouvement en écrivant : sinθ ≈ θ.

Il vient : $\ddot{\theta}+(1-\alpha)\frac{g}{a}\theta=0$ équation d'un oscillateur harmonique de période : $T=\frac{T_o}{\sqrt{1-\alpha}}$ avec $T_o=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$

7. Vibrations dans une molécule diatomique :



1°) F(r) = -dEp/dr donne : $F(r)=\frac{+6a}{r^7}+\frac{-12b}{r^{13}}$

2°) F(r) = 0 conduit à : $r_{éq} = (2b/a)^{1/6}$.

Equilibre stable : r = $r_{éq}$ correspond à dEp/dr = 0, et sur le graphe on constate que cet extrémum est une position de minimum de la fonction Ep(r).

On peut vérifier par le calcul :

$$\left(\frac{d^2Ep}{dr^2}\right)_{r=r_{éq}}=\frac{d}{dr}\left(-F(r)\right)_{r=r_{éq}}=\frac{6\times7a}{r_{éq}^{\ 8}}+\frac{-12\times13b}{r_{éq}^{\ 14}}>0$$

En effet : $\left(\frac{d^2Ep}{dr^2}\right)_{r=r_{éq}}=\frac{-6\times7a}{r_{éq}^{\ 8}}+\frac{12\times13b}{r_{éq}^{\ 14}}=\frac{-7}{r_{éq}}\left(\frac{6a}{r_{éq}^{\ 7}}-\frac{12b}{r_{éq}^{\ 13}}\right)+\frac{12\times6b}{r_{éq}^{\ 14}}$

or $\left(\frac{6a}{r_{éq}^{\ 7}}-\frac{12b}{r_{éq}^{\ 13}}\right)=0$ d'après le 2°). Comme b > 0, on aura bien $\left(\frac{d^2Ep}{dr^2}\right)_{r=r_{éq}}=\frac{12\times6b}{r_{éq}^{\ 14}}>0$

3°) On se place dans un référentiel centré sur l'atome de masse la plus grande. Cet atome étant supposé rester inerte, le référentiel sera galiléen. Le système étudié est l'atome de masse m, faible.

La conservation de l'énergie mécanique s'écrira : E = cste = Ep + mv²/2 où $v^2 = \dot{r}^2$

donc : $E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + Ep(r)$

On peut faire un DL2 de Ep(r) en $r_{éq}$:

$$Ep(r) \approx Ep(r_{éq}) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2Ep}{dr^2}\right)_{r=r_{éq}} \left(r - r_{éq}\right)^2 = Ep(r_{éq}) + \frac{36b}{r_{éq}^{\;14}}\left(r - r_{éq}\right)^2$$

puis dériver l'équation de conservation de l'énergie mécanique E par rapport au temps :

$$m\dot{r}\ddot{r} + \frac{72b}{r_{éq}^{\;14}}\left(r - r_{éq}\right)\dot{r} = 0$$

On tire l'équation différentielle linéaire du 2° ordre sur r : $\ddot{r} + \frac{72b}{mr_{éq}^{\;14}}\left(r - r_{éq}\right) = 0$

Oscillations harmoniques autour de $r_{éq}$ à pulsation ω_o = $\sqrt{72b/m}.(2b/a)^{-7/6}$

On peut aussi procéder dans l'ordre inverse, c'est-à-dire dériver d'abord l'équation de conservation de l'énergie mécanique par rapport au temps :

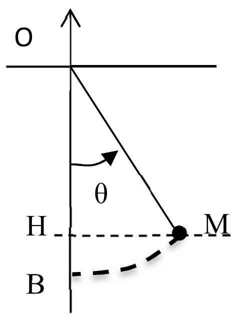
$$\frac{dE}{dt} = 0 = m\dot{r}\ddot{r} + \frac{dEp(r)}{dr}\dot{r}$$

puis utiliser un développement limiter au premier ordre de $\frac{dEp(r)}{dr}$:

$$\frac{dEp(r)}{dr} \approx \left(\frac{dEp(r)}{dr}\right)_{r=r_{éq}} + \left(\frac{d^2Ep}{dr^2}\right)_{r=r_{éq}}\left(r - r_{éq}\right) = \frac{72b}{r_{éq}^{\;14}}\left(r - r_{éq}\right)$$

ce qui mène aux mêmes résultats .

8. Exemple d'oscillateur non linéaire : le pendule simple :



a. z = $z = \overline{BH} = \overline{BO} + \overline{OH} = l - l\cos\theta$

la vitesse de M est v = l.dθ/dt

L'écriture de l'intégrale première de l'énergie donne :

$$E = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta)$$

b. La dérivation de cette équation par rapport au temps mène à l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$ équation différentielle NON LINEAIRE.

Le pendule simple est donc un **oscillateur non linéaire**.

c. Son portrait de phase, c'est à dire la représentation $\dot{\theta} = f(\theta)$ est obtenue à partir de l'intégrale première de l'énergie, que l'on peut écrire sous la forme :

$$e = \dot{\theta}^2 + 2\omega_o{}^2(1-\cos\theta) \quad \text{avec } \omega_o^2 = g/l \text{ et } e = 2E/ml^2$$

On tire alors : $\dot{\theta} = \pm\sqrt{e - 2\omega_o{}^2(1-\cos\theta)}$

Cette équation correspond pour diverses valeurs de e, donc de l'énergie mécanique E du système, a une trajectoire de phase donnée dans le plan de phase ($\theta, \dot{\theta}$).

d. Remarquons que l'approximation des petits mouvements conduit à : $\sin\theta \approx \theta$, donc à une équation différentielle du mouvement linéaire de forme : $\ddot{\theta} + \omega_o{}^2\theta = 0$ correspondant à un *oscillateur harmonique*.

Du point de vue énergétique, cette approximation revient en effet à un DL2 au voisinage de 0 sur l'énergie potentielle amenant, comme $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$: $\dot{\theta}^2 = \frac{2}{l}\left(\frac{E}{ml} - g\frac{\theta^2}{2}\right)$

Soit $\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}\theta^2 = \frac{2E}{ml^2}$ équation d'une ellipse droite

dans le système de coordonnées {x = θ ; y = dθ/dt}

soit avec $\omega_o^2 = g/l$: $\frac{\dot{\theta}^2}{\omega_o^2} + \theta^2 = \frac{2E}{mgl}$ équation d'un cercle. L'intérêt du changement d'échelle sur les ordonnées amenant $y = (d\theta/dt)/\omega_o$ est que la linéarisation du comportement du pendule se traduit alors par une trajectoire de phase exactement circulaire, ce qui est graphiquement plus aisé à visualiser.

9. Oscillateur électrostatique.

$F_x = qQ/(4\pi\varepsilon_o x^2)$ avec $F_x.dx = -dE_p$ amène $E_p = qQ/(4\pi\varepsilon_o x)$.

Soit une énergie potentielle totale : $E_p = qQ/(4\pi\varepsilon_o x) + kx^2/2 = K/x + kx^2/2$.

On résout $dE_{ptot}/dx = 0$ ce qui conduit à $x^3 = K/k$. d'où x_e.

On peut vérifier que x_e est une position d'équilibre stable en calculant d^2E_{ptot}/dx^2 dont la valeur en x_e est $d^2E_{ptot}/dx = 3k$; elle est donc positive.

Système conservatif, pour lequel on écrit l'énergie mécanique : $E = E_{ptot} + E_c$ avec une vitesse $v = dx/dt$.

En restant au voisinage de l'équilibre, on remplace E_{ptot} par son expression selon un DL2 au voisinage de x_e,qui se réduit à $E_{ptot} \approx (3k/2)(x - x_e)^2$

En dérivant l'équation de conservation de l'énergie mécanique, on aboutit à l'équation du mouvement au voisinage de x_e :

$d^2x/dt^2 + (3k/m)(x - x_e) = 0$

Oscillations harmoniques de pulsation ω_o telle que $\omega_o^2 = 3k/m$.