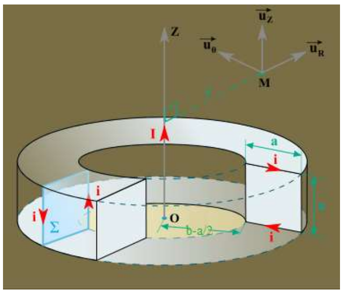
Induction (1) : circuit fixe dans un champ magnétique variable

1. Pince ampère-métrique :

Une pince ampère-métrique est constituée d'un tore de section carrée de côté a = 1 cm, d'axe (Oz) et de rayon moyen b = 5 cm, sur lequel sont bobinées régulièrement un grand nombre N = 10^4 de spires carrées de côté a en série.
Ce circuit de résistance R = 0,2 Ω est fermé sur un ampèremètre de résistance R_A = 0,3 Ω.

D'autre part un fil long (considéré comme infini) confondu avec l'axe Oz est parcouru par un courant d'intensité variable de fréquence f = 50 Hz et d'expression I = I_M cos(ωt). Soit i(t) = i_M cos(ωt + φ) la valeur du courant dans la pince ampère-métrique en régime sinusoïdal forcé. Soit $\vec{B}$ le champ magnétique total, créé par le fil et la pince.



Ce dispositif permet en pratique de mesurer l'intensité du courant traversant un câble sans avoir à insérer d'ampèremètre dans le circuit.

1. Justifier la structure géométrique du champ magnétique $\vec{B}$ de forme : $\vec{B} = B_\theta(r,z)\overrightarrow{u_\theta}$.

Par une étude qui n'est pas demandée ici, on peut établir l'expression $B_\theta(r)$ en un point M situé dans la section d'une spire carrée du tore : $B_\theta(r)$ = (μₒ / 2πr).(I + N.i) où μₒ = 4π.10^{-7} H.m^{-1} est la perméabilité magnétique du vide.

2. Justifier qu'en première approximation, on peut considérer le champ magnétique comme ayant un module uniforme à l'intérieur du tore.
3. En déduire le flux magnétique total ϕ à travers les N spires, puis l'expression du rapport i_M/I_M (on pourra utiliser la notation complexe). Quelle est approximativement la valeur de ce rapport compte tenu des valeurs numériques des grandeurs ?

Réponse : 1. analyse des symétries et invariances ; 2. a <<b donc r ≈ b ; 3.

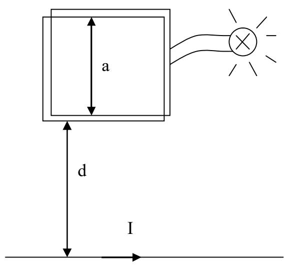
$$\phi = BSN = \mu_o N \frac{I + Ni}{2\pi b} a^2$$

Ecrire la loi de Faraday en notation complexe. Isoler i_M. En prenant le module

$$\frac{i_M}{I_M} = \frac{\omega.\mu_o \frac{N}{2\pi b} a^2}{\sqrt{(R+R_A)^2 + \left(\omega.\mu_o \frac{N^2}{2\pi b} a^2\right)^2}}$$

En première approximation $R + R_A \ll \omega.\mu_o \frac{N^2}{2\pi b} a^2$ donc $i_M/I_M \approx 1/N$.

2. Induction près d'une ligne électrique :



Une ligne à haute tension transporte un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz et de valeur efficace I = 1kA. On approche une bobine plate de N spires carrées de côté a = 30 cm à une distance d = 1,0 m comme indiqué sur le schéma (son plan moyen contient le fil, placé parallèlement à deux de ses côtés).

Cette bobine, d'inductance et de résistance négligeables est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace à ses bornes est supérieure à 1,5 V.

1. Le champ magnétique produit par le fil conducteur est de direction orthoradiale et son module a pour expression $B_\theta(r) = \mu_o . I/(2\pi r)$. Evaluer le flux magnétique traversant le cadre.
2. Déterminer le nombre de spires nécessaires pour que l'ampoule s'éclaire.

Réponse : 1. Décomposer la surface du cadre en bandes infinitésimales de longueur a et de largeur dr, parallèles au fil puis sommer les flux élémentaires correspondants.

2. Par la loi de Faraday, exprimer la f.é.m. induite. Allumage de la lampe pour E > 1,5 V soit

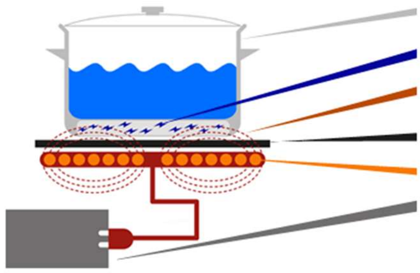
$$\mathrm{E} = \mathrm{N.f.}\mu_o I.a.ln\left(\frac{d+a}{d}\right) > 1{,}5\ V$$

Il faudra au moins N = 304 spires.

3. Plaque à induction :

Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable.

Logé dans une plaque en céramique, un bobinage alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ.



Ce bobinage est soumis à une tension d'alimentation $v_1(t)$ variable sinusoïdale de valeur efficace V_1 = 130 V de fréquence f = 25 kHz. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage (l'inducteur) et la plaque circulaire formant le fond du récipient (l'induit) assimilable à une spire unique fermée.

L'inducteur comporte 20 spires de rayon R = 5,0 cm, de résistance totale $R_1 = 1{,}8.10^{-2}$ Ω et d'auto-inductance L_1 = 30 µH. L'induit est représenté par une spire unique de résistance R_2 = 8,3 mΩ et d'auto-inductance L_2= 0,24 µH. L'ensemble se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle M.

1. Ecrire les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre les intensités i_1 et i_2 circulant dans chacun d'eux).
2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\underline{A} = \underline{I_2} / \underline{I_1}$ ainsi que l'expression littérale de l'impédance complexe d'entrée du bobinage inducteur $Z_e = \underline{V_1} / \underline{I_1}$.
3. Vérifier que la fréquence choisie amène à pouvoir négliger les résistances R_1 et R_2. Simplifier les expressions littérales précédentes en conséquence puis effectuer le calcul numérique des modules de $\underline{A}$ et $\underline{Z_e}$ sachant que la valeur de mutuelle est estimée à M = 2,0 µH.
4. Déterminer alors la puissance dissipée dans les parties résistives du circuit inducteur et du circuit induit.
5. On soulève le récipient. Par un raisonnement qualitatif, déterminer si l'amplitude I_1 du courant appelé par l'inducteur décroît ou augmente.

Réponse : 1. et 2. En passant en expressions complexes : $v_1 = R_1 i_1 + jL_1\omega i_1 + jM\omega i_2$ *(1)*

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + jL_2\omega i_2 + jM\omega i_1 \quad (2)$$

$$A = \frac{i_2}{i_1} = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}\ et\ Z_{e1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

4.

$$P_1 = R_1 I_1^{\,2} = \frac{R_1 V_1^{\,2}}{\omega^2.\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 69{,}4\ W \quad et \quad P_2 = R_2 I_2^{\,2} = \frac{R_2 V_1^{\,2} M^2}{\omega^2.(L_1L_2 - M^2)^2} = 2{,}22\ kW$$

5.M, inductance mutuelle, décroît quand le circuit induit est éloigné de l'inducteur. I_1 va décroître (voir corrigé...)

4. Dimensionnement d'un transformateur.

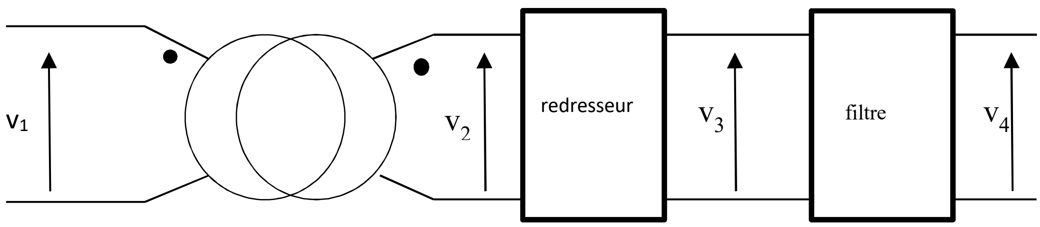
On cherche à dimensionner le transformateur utilisé pour recharger un portable. La chaîne d'énergie, logée dans un boîtier placé sur le cordon d'alimentation du portable se compose successivement de :

● l'alimentation par le secteur (ERDF) qui délivre une tension $v_1(t) = V_{1o}.\sin(2\pi ft)$ où $f = 50$ Hz et $V_{1o} = 310$ V

● un transformateur constitué de deux bobinages en interaction mutuelle, reliés magnétiquement par un noyau ferromagnétique, dont les nombres de spires sont respectivement N_1 et N_2, délivrant sur la sortie de son circuit secondaire la tension $v_2(t) = V_{2o}.\sin(2\pi ft)$

● d'un redresseur, montage basé sur l'emploi de diodes à jonctions, qui délivre en sortie une tension $v_3(t) = |v_2(t)|$

● d'un filtre moyenneur, dont la sortie de tension v_4 est la valeur moyenne de la tension v_3 appliquée à son entrée



La batterie du portable est branchée en sortie de chaîne et requiert une tension de charge constante $v_4 = 12$ V.

1. Exprimer V_{2o} en fonction de V_{1o}, f et le rapport $m = N_2 / N_1$.
2. Tracer sur un même graphe les allures des tensions $v_2(t)$, $v_3(t)$ et v_4.
3. Quelle est la nature du filtre employé entre v_3 et v_4 ? Proposer une valeur pour sa fréquence de coupure.
4. Etablir l'expression de v_4 en fonction de V_{1o} et des autres paramètres du problème. Déterminer la valeur souhaitée pour le rapport de transformation m.

Réponse :

1. *$V_{2o} = N_2/N_1 = m.V_{1o}$ (voir cours sur le transformateur) ; 2. $v_3(t) = |v_2(t)|$*

3. *Filtre passe-bas, $f_c = 10$ Hz << $2f_o$.*

4. $v_4 = \langle v_3 \rangle = \frac{2m.V_o}{\pi}$; *$m = \pi.v_4/(2.V_o) = 7{,}8.10^{-2} < 1$; il y a plus de spires au primaire qu'au secondaire.*