

Induction (1) : circuit fixe dans un champ magnétique variable - CORRIGES
1. Pince ampère-métrique :

1. On raisonne en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe (Oz) étant porté par le fil.

Pour tout point M, le plan (M, Oz) passant par le fil et ce point M est un plan de symétrie ; le champ magnétique en M doit lui être orthogonal, donc est orthoradial : $\vec{B} = B_\theta \vec{u}_\theta$.

Le problème est invariant par rotation autour de (Oz) donc par rapport à θ . Donc $B_\theta(r, z)$, la coordonnée de \vec{B} ne peut dépendre que de r et z .

Une étude qui n'est pas au programme de première année amène finalement :

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi r} \right) \cdot (I + N \cdot i) \vec{u}_\theta = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$$

- $B_\theta(r) = (\mu_0 / 2\pi r) \cdot (I + N \cdot i)$ résulte de l'addition du terme de champ du au fil $B_{1\theta}(r) = (\mu_0 / 2\pi r) \cdot I$ et de celui du au tore $B_\theta(r) = (\mu_0 / 2\pi r) \cdot (N \cdot i)$.
- Le rayon moyen étant $b = 5$ cm, et la largeur des spires étant de $a = 1$ cm, la distance à l'axe (Oz) à considérer est comprise entre 4,5 et 5,5 cm. On prendra un module uniforme $B = (\mu_0 / 2\pi r) \cdot (I + N \cdot i)$ pour $r = b = 5$ cm à l'intérieur du tore.
- Le flux magnétique à travers le tore sera donc, en considérant B uniforme : $\phi = B \cdot S \cdot N$ car N spires sont concernées.

Soit donc :

$$\phi = \mu_0 N \frac{I + Ni}{2\pi b} a^2$$

La f.é.m. d'induction aux bornes du tore sera déterminée par la loi de Faraday :

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

Introduisons la notation complexe : $i(t) = I_M \cdot \cos(\omega t)$ représentée par $\underline{i} = I_M \cdot \exp(j\omega t)$

et $i(t) = i_M \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ représentée par $\underline{i} = i_M \cdot \exp(j\omega t) \cdot \exp(j\varphi)$.

Le flux complexe est alors :

$$\phi = \mu_0 N \frac{I_M + Ni_M \cdot \exp(j\varphi)}{2\pi b} a^2 \cdot \exp(j\omega t)$$

La loi de maille donne alors :

$$(R + R_A) i_M \cdot \exp(j\varphi) = -j\omega \cdot \phi = -j\omega \cdot \mu_0 N \frac{I_M + Ni_M \cdot \exp(j\varphi)}{2\pi b} a^2 \cdot \exp(j\omega t)$$

soit :

$$\left[(R + R_A) + j\omega \cdot \mu_0 \frac{N^2}{2\pi b} a^2 \right] i_M \cdot \exp(j\varphi) = -j\omega \cdot \mu_0 N \frac{I_M}{2\pi b} a^2$$

d'où en modules :

$$\frac{i_M}{I_M} = \frac{\omega \cdot \mu_0 \frac{N}{2\pi b} a^2}{\sqrt{(R + R_A)^2 + \left(\omega \cdot \mu_0 \frac{N^2}{2\pi b} a^2 \right)^2}}$$

$R + R_A = 0,5 \Omega$.

$$\omega \cdot \mu_0 \frac{N^2}{2\pi b} a^2 = f \cdot \mu_0 \frac{N^2}{b} a^2 = 12,6 \Omega$$

En première approximation

$$R + R_A \ll \omega \cdot \mu_0 \frac{N^2}{2\pi b} a^2$$

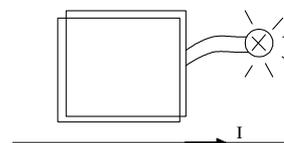
donc $i_M/I_M \approx 1/N$.

En mesurant une intensité efficace $i_M = 2,3 \text{ mA}$, on en déduit une intensité dans le fil $I_M = 23 \text{ A}$.

2. Induction près d'une ligne électrique :

- $B_\theta(r) = \mu_0 \cdot I / (2\pi r)$. Pour évaluer le flux magnétique traversant le cadre, on va décomposer la surface du cadre en bandes infinitésimales de longueur a et de largeur dr , parallèles au fil ; chaque bande amène un flux infinitésimal :

$$d\phi = \mu_0 \cdot I / (2\pi r) \cdot a \cdot dr$$



En sommant les flux élémentaires correspondants :

$$\phi = \int_{\text{spires}} d\phi = \int_{r=d}^{r=d+a} N \cdot \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r} \cdot a \cdot dr = N \cdot \mu_0 \frac{I}{2\pi} \cdot a \cdot \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

- Par la loi de Faraday, on exprime la fém induite $e = -d\phi/dt$

L'inductance des spires étant supposée négligeable, on n'a pas de terme de flux produit par le passage du courant électrique dans ces spires à prendre en compte dans le calcul (ce qui simplifie notablement les choses...), c'est à dire que l'on néglige l'auto-induction.

Il vient pour $I(t) = I_M \cdot \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi \cdot f$ où $f = 50 \text{ Hz}$:

$$e(t) = N \cdot \omega \cdot \mu_0 \frac{I}{2\pi} \cdot a \sqrt{2} \cdot \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \sin(\omega t)$$

avec en valeurs efficaces $I = 1,0 \text{ kA}$ et

$$E = N \cdot f \cdot \mu_0 I \cdot a \cdot \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) > 1,5 \text{ V}$$

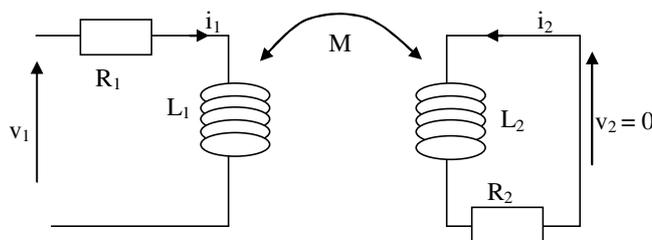
Il faudra $N > 303,3$ spires, donc au moins 304 spires.

3. Plaque à induction :

- Ecrivons les équations électriques relatives aux deux circuits (équations de couplage entre les intensités i_1 et i_2 circulant dans chacun d'eux).

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et}$$

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



représentation en convention récepteur

- En passant en expressions complexes : $v_1 = R_1 i_1 + jL_1 \omega i_1 + jM \omega i_2$ (1)

et

$$u_2 = 0 = R_2 i_2 + jL_2 \omega i_2 + jM \omega i_1 \quad (2)$$

De (2) on tire :

$$i_2 = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \cdot i_1$$

donc l'amplitude complexe :

$$A = i_2/i_1 = \frac{-jM\omega}{R_2 + jL_2\omega}$$

On injecte ce résultat dans (1), d'où l'impédance complexe d'entrée du bobinage inducteur $Z_e = \underline{V}_1 / \underline{I}_1$.

$$Z_{e1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$

3. Compte tenu de la fréquence choisie $R_1 \ll L_1.\omega$ (numériquement $R_1 = 0,018 \Omega$ et $L_1.\omega = 4,7 \Omega$) et $R_2 \ll L_2.\omega$ (numériquement $R_2 = 0,0083 \Omega$ et $L_2.\omega = 0,038 \Omega$) ce qui amène à pouvoir négliger les résistances R_1 et R_2 .

En simplifiant les expressions littérales précédentes en conséquence :

$$A = i_2/i_1 = \frac{-M}{L_2}$$

$$\text{et : } v_1 = jL_1\omega i_1 + jM\omega \cdot \left(-\frac{M}{L_2}\right) \cdot i_1$$

Le calcul numérique, sachant que la valeur de mutuelle est estimée à $M = 2,0 \mu\text{H}$,

donne des modules de $\underline{A} = M/L_2 = 8,3$ et de

$$Z_{e1} = \omega \cdot \sqrt{\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 2,1 \Omega$$

4. La puissance dissipée dans les parties résistives du circuit inducteur et du circuit induit sera donc :

$$P_1 = R_1 I_1^2 = \frac{R_1 V_1^2}{\omega^2 \cdot \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)^2} = 69,4 \text{ W}$$

$$P_2 = R_2 I_2^2 = \frac{R_2 V_1^2 M^2}{\omega^2 \cdot (L_1 L_2 - M^2)^2} = 2,22 \text{ kW}$$

5. On soulève le récipient. Le champ magnétique créé par l'inducteur et vu par la plaque intégrée au récipient diminue. Le flux magnétique à travers cette plaque diminue et donc l'induction mutuelle M diminue. Alors l'impédance d'entrée Z_e augmente pour une même valeur de tension d'alimentation, donc la valeur efficace de l'intensité dans l'inducteur $I_1 = V_1/Z_{e1}$ va décroître. Il en sera de même pour I_2 l'intensité dans la plaque chauffante fixée au récipient.

4. Dimensionnement d'un transformateur.

- $V_{20} = N_2/N_1 = m.V_{10}$ (voir cours sur le transformateur).
- $v_3(t)$ est la valeur absolue de $v_2(t) = m.V_{10}.\sin(2\pi f.t)$.
- Le signal de tension $v_3(t)$ de période $T/2$ (T étant la période de $v_1(t)$) est composé d'une valeur moyenne (ou composante continue) que l'on veut conserver, d'un fondamental de pulsation $\omega_1 = 2\pi/(T/2) = 4\pi/T = 4\pi.f_0$ et d'harmoniques de pulsation multiples de ω_1 donc de fréquences f_n de forme : $f_n = 2n.f_0$.

Pour n'avoir en v_4 que la valeur moyenne, il faut filtrer toutes les composantes variables de $v_3(t)$ donc employer un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c largement inférieure à $2.f_0 = 100 \text{ Hz}$.

Par exemple $f_c = 10 \text{ Hz}$.

4. Calculons sur une période ($T/2$) du signal $v_3(t)$ sa valeur moyenne :

$$\langle v_3 \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} m.V_0 \sin(2\pi f_0 t) dt = \frac{2m.V_0}{T} \left[\frac{\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} \right]_0^{T/2} = \frac{2m.V_0}{\pi} = v_4$$

5. $m = \pi.v_4/(2.V_0) = 7,8.10^{-2} < 1$; il y a plus de spires au primaire qu'au secondaire (environ 13 fois plus). La tension variable $v_3(t)$ aura une amplitude de 24 V environ, et la tension de sortie v_4 de l'appareil sera une tension continue avec $v_4 = 12 \text{ V}$.