

Induction magnétique (2) : circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire (CORRIGES)

1. Cadre carré en chute dans un champ magnétique :

1. Le champ magnétique est uniforme. Le flux est $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 a \cdot z(t)$ en orientant le contour de façon à déterminer un sens positif du flux dans le sens positif de (Oy).

$$e = -d\phi/dt = -B_0 a \cdot dz/dt .$$

2. Attention au sens d'orientation du cadre qui algébrise le flux. Sur le côté MN, Force de Laplace freinant le mouvement : $\vec{F} = i \overrightarrow{MN} \wedge B_0 \vec{e}_y$
ce qui amène une force d'expression : $-B_0^2 a^2 \dot{z}/R$; cette force est bien dirigée dans le sens opposé de la chute.

3. En écrivant la R.F.D. sur (Oz) :

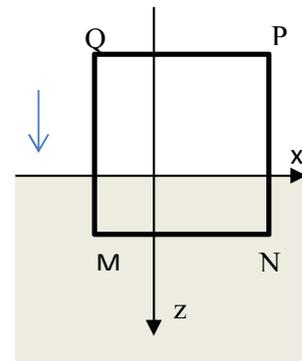
$$m\ddot{z} = mg - B_0^2 a^2 \dot{z}/R$$

dont la résolution donne :

$$\dot{z}(t) = \frac{mgR}{B_0^2 a^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

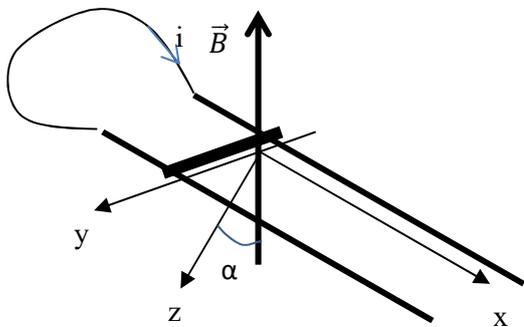
avec $\tau = mR / (B_0^2 a^2)$ constante de temps du mouvement pour $0 < t < t_a$ où t_a est tel que $z(t_a) = a$;

à $z > a$, le flux ne varie plus avec le mouvement, le cadre est alors soumis seulement à son poids (si on néglige tout frottement). Donc $\ddot{z} = g$ si $t > t_a$ et l'on aura $v(t > t_a) = v(t_a) + g \cdot (t - t_a)$.



2. Mouvement d'une barre roulant sur des rails, freinage inductif.

1. La barre se déplace en translation sur les deux rails avec une vitesse $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{e}_x$; le circuit qu'elle ferme a une surface $S(t)$ variant du fait même du mouvement de la barre, soit $S(t) = S(0) + L \cdot x(t)$.



Le flux magnétique est, pour un champ magnétique uniforme : $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = -B \cdot S(t) \cdot \cos\alpha$

Il y a donc une f.é.m. induite sur le circuit $e = -d\phi/dt = B \cdot L \cdot \cos\alpha \cdot dx/dt$

Cette f.é.m. induite produit un courant d'intensité $i(t) = B \cdot L \cdot \cos\alpha \cdot \dot{x}/R$

La barre subit donc une force de Laplace : $\vec{F} = i \vec{l} \wedge \vec{B}$

que l'on exprime sur la base cartésienne liée aux rails (voir schéma) :

$$\vec{F} = i L \vec{e}_y \wedge B (-\cos\alpha \vec{e}_z - \sin\alpha \vec{e}_x)$$

soit

$$\vec{F} = -B^2 L^2 \frac{\dot{x}}{R} (\cos^2\alpha \vec{e}_x - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \vec{e}_z)$$

En écrivant la R.F.D. pour la barre et en projetant sur (Ox) :

$$-B^2 L^2 \frac{\dot{x}}{R} \cos^2 \alpha + mg \cdot \sin \alpha = m \ddot{x}$$

soit :

$$\ddot{x} + B^2 L^2 \frac{\dot{x}}{mR} \cos^2 \alpha = g \cdot \sin \alpha$$

L'inconnue étant $v(t) = \dot{x}$

La solution est de forme : $v(t) = v_{\text{lim}} \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$ avec $\tau = mR / (B^2 L^2 \cdot \cos^2 \alpha)$ et $v_{\text{lim}} = mg \cdot R \cdot \sin \alpha / (B^2 L^2 \cdot \cos^2 \alpha)$.

AN : Pour $B = 0,10 \text{ T}$; $L = 0,10 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $R = 1,0 \Omega$; $\alpha = 30^\circ$ et $m = 15 \text{ g}$ on tire $v_{\text{lim}} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\tau = 20 \text{ s}$.
Quand v atteint v_{lim} , on aurait $I = I_{\text{max}} = B \cdot L \cdot v_{\text{lim}} \cdot \cos \alpha / R = 0,87 \text{ A}$.

Expérience pratiquement impossible à mettre en oeuvre, car il faudrait un dispositif dont la longueur serait de l'ordre de $v_{\text{lim}} \cdot \tau = 2 \text{ km}$, en imposant $B = 0,10 \text{ T}$ tout au long.

Dans un champ de 10 T , les valeurs sont modifiées selon : $v_{\text{lim}} = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\tau = 0,20 \text{ s}$, ce qui permet une expérience raisonnable sur quelques dizaines de centimètre à l'intérieur d'une machine d'IRM...

3. Spire en rotation, « dynamo » d'une lampe de poche :

1. Le flux magnétique est, pour un champ magnétique uniforme : $\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S(t) \cdot \cos \alpha$

d'où un flux magnétique $\phi = B \pi \rho^2 \cdot \cos(\omega t)$.

Par la loi de Faraday $e = -d\phi/dt$ donne $e(t) = -\omega B \pi \rho^2 \cdot \sin(\omega t)$. D'où la tension efficace (amplitude sur $\sqrt{2}$) :

$$E = B \omega \pi \rho^2 / \sqrt{2}.$$

2. $\vec{M} = i S \vec{n}$ avec $i = e/R = -\omega(B/R) \cdot \pi \rho^2 \cdot \sin(\omega t)$

3. Le couple des actions de Laplace exercées sur la spire va s'opposer au mouvement de rotation (loi de Lenz).

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = - \frac{B^2}{R} \omega \pi \rho^2 \sin^2(\omega t) \vec{u}_z$$

Dans un mouvement de rotation d'un solide soumis à un couple de moment $\vec{\Gamma}$ porté par (Oz), animé d'une vitesse angulaire de valeur ω sur un axe (Oz), la puissance est $P = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}$.

Donc :

$$P = \frac{B^2}{R} \omega^2 \pi \rho^2 \sin^2(\omega t)$$

Pour N spires, en moyennant sur le temps, avec $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$, le moment magnétique devient $M = NiS$, où i est lui-même multiplié par N car $i = e/R$ et $e = -N \cdot d\phi/dt$ (ϕ étant le flux magnétique à travers une seule spire) :

$$\langle P \rangle = N^2 \frac{B^2}{2R} \omega^2 (\pi \rho^2)^2$$

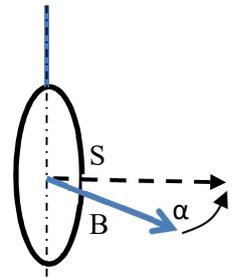
Le couplage par induction répond à la relation : $P_{\text{Laplace}} + P_{\text{élec}} = 0$ qui signifie que la puissance consommée par les actions de Laplace est transformée en la puissance électrique produite dans le circuit par induction.

L'équation électrique du circuit s'écrit $e = R \cdot i$ soit en termes de puissances : $e i = P_{\text{élec}} = R i^2$. La puissance électrique produite par induction est entièrement dissipée dans le circuit par effet Joule.

Au bilan, dans cette situation de régime permanent, la puissance mécanique apportée $P = \vec{\Gamma}_{\text{ent}} \cdot \vec{\omega}$, assurant l'entraînement en rotation des spires est entièrement convertie en effet Joule.

4. Spire dans un champ magnétique uniforme :

1. Analyse du problème : l'action mécanique exercée sur la spire résultera de l'interaction du champ magnétique avec un courant circulant dans la spire, par des forces de Laplace. Ce courant i sera lui-même dû à un phénomène d'induction, lié au déplacement de la spire dans le champ magnétique uniforme. L'expression de la f.é.m. d'induction par la loi de Faraday suppose d'exprimer préalablement le flux magnétique à travers la spire de section $S = \pi a^2$.
f.é.m. d'induction :



$$e = -d\phi/dt \quad \text{avec} \quad \phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos\alpha \quad \text{Donc} \quad e = B \cdot S \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\alpha$$

Moment magnétique de la spire :

Le courant induit dans la spire sera donc

$$i = e/R = B \cdot \left(\frac{S}{R}\right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\alpha$$

d'où un moment magnétique :

$$\vec{M} = i \cdot S \vec{n} = B \cdot \left(\frac{S^2}{R}\right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin\alpha \vec{n}$$

L'action des forces de Laplace sur cette spire se traduit par un moment résultant, la résultante des forces étant nulle :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = -B^2 \cdot \left(\frac{S^2}{R}\right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin^2\alpha \vec{e}_z$$

Attention, l'angle α est orienté de la direction du champ magnétique vers celle de la normale à la spire, donc l'angle de M vers B est $-\alpha$.

En écrivant le T.M.C. pour la spire, en projection sur l'axe (Oz) vertical :

$$J\ddot{\alpha} = -B^2 \cdot \left(\frac{S^2}{R}\right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin^2\alpha$$

avec $J = ma^2/2$ (fourni).

2. On linéarise : $\sin^2\alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$, soit donc :

$$\ddot{\alpha} = -B^2 \cdot \left(\frac{S^2}{J \cdot R}\right) \cdot \dot{\alpha} \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

En intégrant par rapport au temps entre $(t = 0, \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0)$ et $(t, \dot{\alpha})$:

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0 - B^2 \cdot \left(\frac{S^2}{J \cdot R}\right) \cdot \left(\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}\right)$$

L'arrêt de la spire est obtenu pour : $\dot{\alpha}(t_f) = 0$ donc pour :

$$\dot{\alpha}_0 = B^2 \cdot \left(\frac{S^2}{2J \cdot R}\right) \cdot \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)$$

3. α_f est donc la solution de l'équation :

$$\sin 2\alpha = \frac{-4JR \dot{\alpha}_0}{B^2 S^2} + 2\alpha$$

Ceci se visualise graphiquement par l'intersection d'une sinusoïde et d'une droite de pente +2 et d'ordonnée à l'origine :

$$\frac{-4JR \dot{\alpha}_0}{B^2 S^2}$$

On constate que l'intersection est unique...

5. Haut-parleur électrodynamique :

1. Voir cours.
2. 3. La mise en équation a été intégralement traitée en cours.
4. L'étude en régime sinusoïdal permanent va faire apparaître une impédance complexe motionnelle \underline{Z}_m venant s'ajouter en série avec l'impédance $\underline{Z}_o = R_o + jL_o\omega$ de la bobine.

Les grandeurs électriques et mécaniques sont couplées par les équations électrique (EE) et mécanique (EM).

On peut établir un équivalent électrique du haut-parleur.

En R.S.F., on introduit les grandeurs complexes associées aux variables $E(t)$, $i(t)$ et $v(t)$, ces grandeurs électriques et mécanique étant toute sinusoïdales, de même pulsation ω imposée par le générateur $E(t)$, car le système est décrit par des **équations différentielles linéaires**.

(EE) s'écrit : $\underline{E} - Ba \cdot \underline{v} = R_o \cdot \underline{i} + jL_o\omega \underline{i}$

(EM) s'écrit : avec $x(t) = \int v(t)dt$ qui donne

$$\underline{x} = \frac{1}{j\omega} \underline{v}$$

et donc : $j m \omega \underline{v} = Ba \cdot \underline{i} - \frac{k}{j\omega} \underline{v} - f \underline{v}$

Pour aboutir à un modèle électrocinétique du haut-parleur, il faut éliminer la vitesse \underline{v} des équations.

En exploitant (EM) :

$$\left(\alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{v} = Ba \cdot \underline{i}$$

soit :

$$\underline{v} = \frac{Ba}{\alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \cdot \underline{i}$$

d'où l'équation électrique :

$$\underline{E} = R_o \underline{i} + jL_o\omega \underline{i} + \frac{B^2 a^2}{f + jm\omega + \frac{k}{j\omega}} \cdot \underline{i}$$

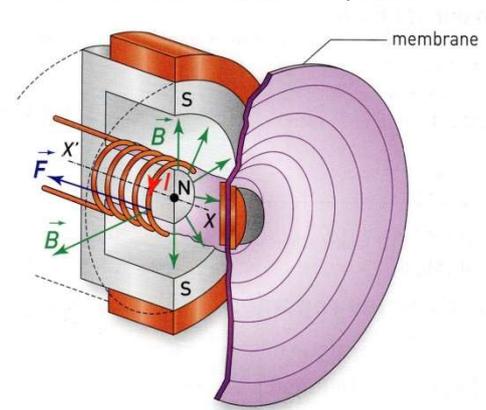
La quantité :

$$\underline{Z}_m = \frac{B^2 a^2}{f + jm\omega + \frac{k}{j\omega}}$$

est nommée impédance motionnelle du haut-parleur. Elle permet une modélisation électrocinétique de celui-ci. En envisageant l'admittance motionnelle $\underline{Y}_m = 1/\underline{Z}_m$

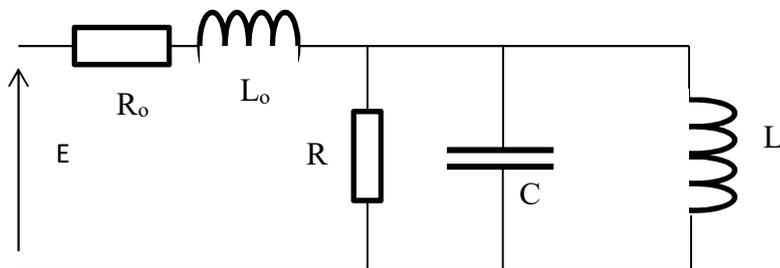
$$\underline{Y}_m = \frac{1}{\underline{Z}_m} = \frac{f}{B^2 a^2} + j \frac{m}{B^2 a^2} \omega + \frac{1}{j\omega} \frac{k}{B^2 a^2}$$

Coupe longitudinale d'un haut-parleur



Ceci permet d'identifier le haut-parleur à une association en dérivation de trois dipôles, respectivement résistif, capacitif et inductif.

$$\underline{Y}_m = R_m + jC_m\omega + \frac{1}{jL_m\omega}$$



avec par identification :

$$R_m = \frac{f}{B^2 a^2} \quad ; \quad C_m = \frac{m}{B^2 a^2} \omega \quad ; \quad 1/L_m = \frac{k}{B^2 a^2}$$

5. La partie réelle de \underline{Z}_m est :

$$R_{ac} = \frac{B^2 a^2 f}{f^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}$$

La puissance acoustique moyenne sera donc : $\langle P_{ac} \rangle = R_{ac} I_e^2$

tandis que la puissance totale consommée par le haut-parleur (en y intégrant la puissance dissipée par effet Joule dans le circuit) sera : $\langle P_{tot} \rangle = (R_{ac} + R_o) I_e^2$

Le rendement en puissance est donc :

$$\eta = \frac{\langle P_{ac} \rangle}{\langle P_{tot} \rangle} = \frac{R_{ac} I_e^2}{(R_{ac} + R_o) I_e^2} = \frac{R_{ac}}{R_{ac} + R_o}$$

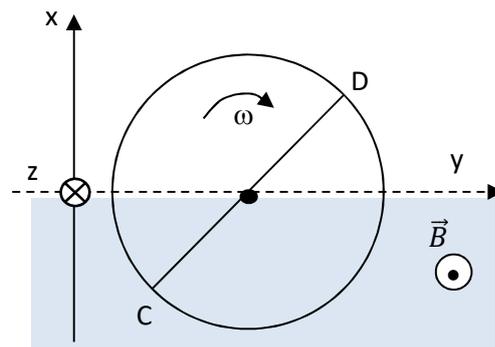
L'étude fréquentielle sur R_{ac} montre que cette grandeur devient très faible pour $\omega \ll \sqrt{k/m}$ comme pour $\omega \gg \sqrt{k/m}$. Seules les fréquences menant à une pulsation $\omega \simeq \sqrt{k/m}$ conduiront à une valeur conséquente de R_{ac} et donc de η . Ceci signifie que la production de son par le haut-parleur ne sera efficace que dans une bande passante définie par ses caractéristiques.

En pratique, les enceintes sont constituées d'une association de plusieurs haut-parleurs de caractéristiques variées dont les bandes passantes sont complémentaires afin de couvrir l'ensemble du spectre auditif.

6. Freinage électromagnétique :

- On peut considérer la situation comme constituée de la superposition de deux circuits dont la partie commune est le diamètre CD, qui sera parcouru par une intensité i , chaque demi-circonférence étant parcourue par $i/2$.

Considérons la surface délimitée par le secteur situé dans la zone où règne \vec{B} pour chacun de ces deux circuits.



Notons l'angle $\theta = (\text{Oy}, \text{OC})$.

Le flux magnétique vaudra $\phi_1 = B \cdot (\theta/2\pi)\pi a^2$ pour l'un des circuits et vaudra pour l'autre $\phi_2 = B \cdot ((\pi-\theta)/2\pi)\pi a^2$.

Pour $\omega > 0$, ϕ_1 augmente et ϕ_2 diminue. Le calcul de la f.é.m. par application de la loi de Faraday peut donc se ramener à une situation équivalente, où le circuit serait constitué du diamètre CD et d'une demi-circonférence correspondant à l'association en dérivation des résistances R de chaque demi-circonférence.

Il vient alors $e = -d\phi/dt = (-Ba^2/2) \dot{\theta}$.

On peut aussi envisager le flux à travers la surface délimitée entre les demi-droites (Oy) et (OC), le segment [OC] étant la seule partie de conducteur plongée dans le champ magnétique et coupant des lignes de champ dans son déplacement. Le flux à travers cette dernière surface est alors directement :

$\phi = B \cdot (\theta/2\pi)\pi a^2$ et sa variation par rapport au temps détermine le courant électrique passant dans cette partie du circuit (et se répartissant ensuite dans les deux demi-circonférences).

D'où la f.é.m. : $e = -d\phi/dt = (-Ba^2/2) \dot{\theta}$

Le courant électrique i qui circule dans le diamètre CD correspond à un schéma électrique équivalent amenant après association équivalente des résistances $R_{\text{éq}} = R + (R//R) = 3R/2$ soit $i = 2e/3R$.

Soit finalement :

$$i = \frac{-Ba^2\dot{\theta}}{3R}$$

2. Les actions mécaniques exercées sur le système correspondent au moment des forces de Laplace par rapport à (Oz). Ces forces de Laplace sont réparties sur l'ensemble de la portion de circuit plongé dans le champ magnétique. Pour la circonférence, les termes de force sont radiaux et n'apportent pas de contribution. Pour le segment [OC] il faut envisager des forces élémentaires sur chaque élément de longueur dr , situé à la distance r de O (r variant de 0 à a). Chaque tronçon élémentaire subit donc une force :

$$\overrightarrow{dF} = idr\overrightarrow{e}_r \wedge (-B)\overrightarrow{e}_z = -\frac{B^2a^2}{3R}\dot{\theta}dr\overrightarrow{e}_\theta$$

Ce tronçon situé à distance r de O apporte alors une contribution élémentaire au moment mécanique d'expression :

$$\overrightarrow{d\Gamma} = r\overrightarrow{e}_r \wedge \overrightarrow{dF} = -\frac{B^2a^2}{3R}\dot{\theta}rdr\overrightarrow{e}_z$$

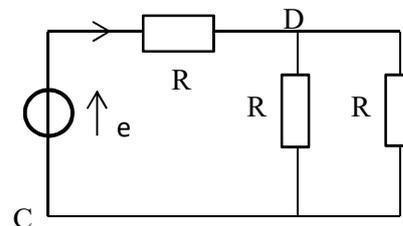
Par intégration entre O et C il vient finalement :

$$\vec{\Gamma} = \int_{r=0}^{r=a} -\frac{B^2a^2}{3R}\dot{\theta}rdr\overrightarrow{e}_z = -\frac{B^2a^4}{6R}\dot{\theta}\overrightarrow{e}_z$$

Le TMC écrit en projection sur(Oz) amène :

$$J\ddot{\theta} = -\frac{B^2a^4}{6R}\dot{\theta}$$

La solution $\omega(t)$ est alors : $\omega(t) = \omega_0 \cdot \exp(-t/\tau)$ où $\omega_0 = \omega(t=0)$ et $\tau = 6RJ/(B^2a^4)$



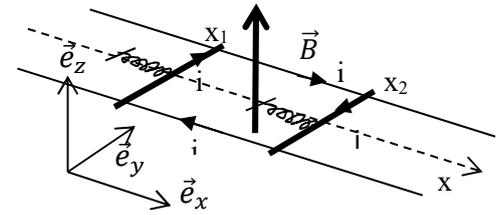
Oscillateur à couplage électromagnétique :

1. Attention à l'algébrisation des grandeurs.

Intensité induite :

Le flux magnétique à travers la surface délimitée par les deux barres vaut
 $\phi = B \cdot S = B \cdot a \cdot (x_2 - x_1)$

Attention au sens d'orientation choisi pour l'intensité i , qui détermine l'orientation du circuit et donc le signe du flux.



La f.é.m. due au phénomène d'induction est liée ici à la variation de la surface $S = a \cdot (x_2 - x_1)$ du fait du mouvement relatif des deux barres. La loi de Faraday donne : $e = -d\phi/dt$

Soit avec la relation électrocinétique $e = Ri$ sur le circuit de résistance globale R :

$$i = \frac{B_0 a}{R} (x_1 - x_2)$$

Système d'équations mécaniques :

Le mouvement de la barre (1) est décrit en appliquant la R.F.D. dans un référentiel lié aux rails :

Cette barre est soumise à son poids, compensé par la réaction des rails ; on néglige les frottements solides qui existeraient au contact avec les rails.

La barre (1) est aussi soumise à une force de Laplace d'expression : $\vec{F} = ia\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = iaB_0\vec{e}_x$

d'où en projection sur (Ox) : $m\ddot{x}_1 = -k \cdot x_1 + iB_0 a$

soit en posant $\omega_0^2 = k/m$: $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = iB_0 a/m$

De même, la barre (2) est soumise à une force de Laplace d'expression : $\vec{F} = -ia\vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z = -iaB_0\vec{e}_x$

d'où l'équation $\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -iB_0 a/m$

En introduisant l'expression de l'intensité obtenue précédemment, on obtient le système de deux équations différentielles couplées, sur x_1 et x_2 :

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{B_0^2 a^2}{mR} (x_1 - x_2) \quad (\text{éq1})$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = +\frac{B_0^2 a^2}{mR} (x_1 - x_2) \quad (\text{éq2})$$

2. En combinant ces deux équations selon une addition ou selon une soustraction membre à membre, on obtient formellement deux équations différentielles relatives à des oscillateurs harmoniques portant sur la somme $S = x_1 + x_2$ et la différence $D = x_1 - x_2$ (non amorti pour S et amorti pour D) :

équation sur S : $\ddot{S} + \omega_0^2 S = 0$;

équation sur D : $\ddot{D} + (2B_0^2 a^2)/(mR)\dot{D} + \omega_0^2 D = 0$ soit $\ddot{D} + 2\lambda \dot{D} + \omega_0^2 D = 0$

Les solutions $S(t)$ et $D(t)$ sont de formes respectives : $S(t) = S_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

soit en faisant jouer les conditions initiales $\{ x_1(0) = a', x_2(0) = 0, \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \}$

$$S(t) = a' \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$D(t) = \exp(-\lambda \omega_0 t)(\alpha \cdot \cos(\omega t) + \beta \cdot \sin(\omega t))$ en posant la pseudo-pulsation ω telle que :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \lambda^2}$$

avec, du fait des conditions initiales et après calculs : $\alpha = a'$ et

$$\beta = \frac{\lambda a'}{\sqrt{1 - \lambda^2}}$$

On peut ensuite remonter aux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ par $x_1 = (S + D)/2$ et $x_2 = (S - D)/2$.

Le terme $D(t)$ étant amené à décroître pour pratiquement s'annuler, tandis que le terme $S(t)$ conserve une amplitude invariante. Ceci signifie que les deux barres vont progressivement évoluer vers une oscillation identique où elles resteront à même distance a' l'une de l'autre. L'amplitude des oscillations de chaque barre sera alors de $a'/2$, avec $x_1(t) = x_2(t)$ pour t suffisant ($t \gg 1/(\lambda \omega_0)$). Le couplage inductif aura donc finalement mis en oscillation la barre (2) du fait de celles initiées sur la barre (1).

L'intensité $i(t)$ va donc décroître pour pratiquement s'annuler pour $t \gg 1/(\lambda \omega_0)$

Il y a une déperdition énergétique par l'effet Joule lors de la circulation du courant i dans le circuit de résistance totale R .

Le modèle consistant à négliger les frottements mécaniques est assez peu vraisemblable et la situation présentée n'est pas réalisable expérimentalement dans les conditions présentées.

3. Bilan énergétique :

Par l'équation électrique : $e = Ri$, on obtient l'équation de puissance : $ei = Ri^2$

Par les équations mécaniques, en multipliant par les vitesses de chacune des barres, on obtient une équation en puissance où sont mises en jeu les puissances des forces de Laplace appliquées à chaque barre :

$$m \dot{x}_1 \dot{x}_1 + k x_1 \dot{x}_1 = - \frac{B_0^2 a^2}{mR} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \dot{x}_1 = P_{L1}$$

$$m \dot{x}_2 \dot{x}_2 + k x_2 \dot{x}_2 = + \frac{B_0^2 a^2}{mR} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \dot{x}_2 = P_{L2}$$

Soit en faisant apparaître les énergies cinétiques et énergies potentielles élastiques :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 \right) = P_{L1} + P_{L2}$$

soit :

$$\frac{d}{dt} (E_c + E_p) = P_{L1} + P_{L2}$$

En sommant l'ensemble des termes mis en jeu :

$$\frac{d}{dt} (E_c + E_p) + Ri^2 = ei + P_{L1} + P_{L2}$$

ei est la puissance développée par les effets inductifs, et l'on sait que $ei + P_{L1} + P_{L2} = ei + P_{Laplace} = 0$

donc

$$\frac{d}{dt} (E_c + E_p) = -Ri^2$$

L'énergie mécanique du système va subir une perte par effet Joule.

Le champ magnétique ne produit aucune énergie, il assure simplement un couplage par conversion électromagnétique.