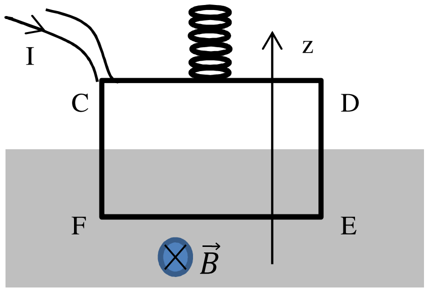
# Action d’un champ magnétique CORRIGES

## 1. Mesure d’un champ magnétique :



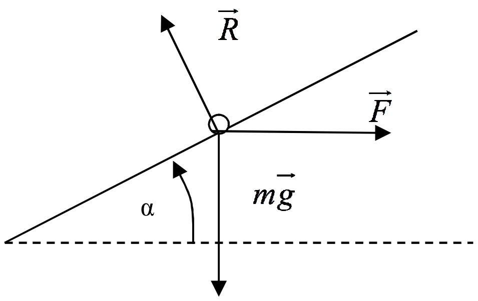

Quand le courant d’intensité I circule dans le cadre, une force de Laplace verticale de module F = N.I.L.B s’exerce sur le côté (EF) ; son sens dépend de ceux du champ et du courant électrique. Les côtés verticaux du cadre DE et FC mettent en jeu des actions qui se compensent.
Si l’ensemble du cadre est plongé dans le champ, alors les effets sur les côtés (EF) et (CD) vont se compenser.
Des ordres de grandeurs raisonnables de I (≈ 1 A), L (0,1 m) et N (≈ 10 ou 100) amènent une force F ≈ $5.10^{-4}$ N trop faible pour être mesurable par un dynamomètre.

## 2. Définition légale de l’Ampère.

Chaque portion ΔL d’un des fils est plongée dans un champ de module $\mu_o I/(2\pi r)$ produit par l’autre fil. Le champ magnétique ainsi produit étant orthogonal au fil considéré, la portion de fil de longueur ΔL subit une force de module F = I.ΔL.B l’attirant vers l’autre fil, en appliquant la loi de force de Laplace : $\vec{F} = I\Delta L\vec{u} \wedge \vec{B}$.
Pour $\mu_o = 4\pi.10^{-7}$ H.m$^{-1}$ on a pour ΔL = 1 m en effet une force F = $2.10^{-7}$ N

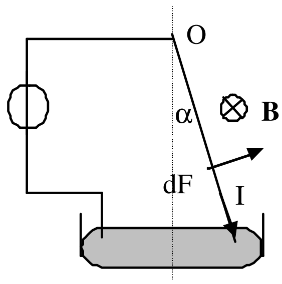
## 3. Barre conductrice sur deux rails parallèles :

1°) La force de Laplace se calcule par $\vec{F} = \int_{barre} I\vec{dl} \wedge \vec{B}$. Cette force sera ici horizontale (et orthogonale à la barre). Son module est F = IBa.
2°) La R.F.D., dans cette situation d’équilibre, s’écrit : $\vec{F} + m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$.
La réaction est supposée orthogonale aux rails.




La projection sur la direction des rails donne : F.cosα = mg.sinα
d’où I = mg.tanα/Ba

## 4. Pendule magnétostatique :




L'équilibre de la barre s'obtient par la nullité des actions qu'elle subit. Ceci demande une résultante des forces nulle (ce qui déterminera la réaction du support au niveau du point O) et la nullité des moments des forces (Théorème du Moment Cinétique).

Calculons le moment en O du poids : le poids peut être considéré comme s'exerçant en G, centre d'inertie de la barre.

La projection du moment sur l'axe orthogonal à la figure est $M_{mg}$ = - mg.l.sinα /2

Le moment des forces de Laplace demande au préalable d'évaluer la force de Laplace élémentaire subie par un élément de courant positionné en un point P de la barre.

$\overrightarrow{dF} = I\overrightarrow{dl} \wedge \overrightarrow{B}$ s'écrit sur la base orthonormée $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\alpha}, \vec{u}\right)$, où $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP}$ :

$\overrightarrow{dF} = Idr\overrightarrow{e_r} \wedge (-B)\vec{u} = IBdr\overrightarrow{e_\alpha}$ en notant $r = OP$.

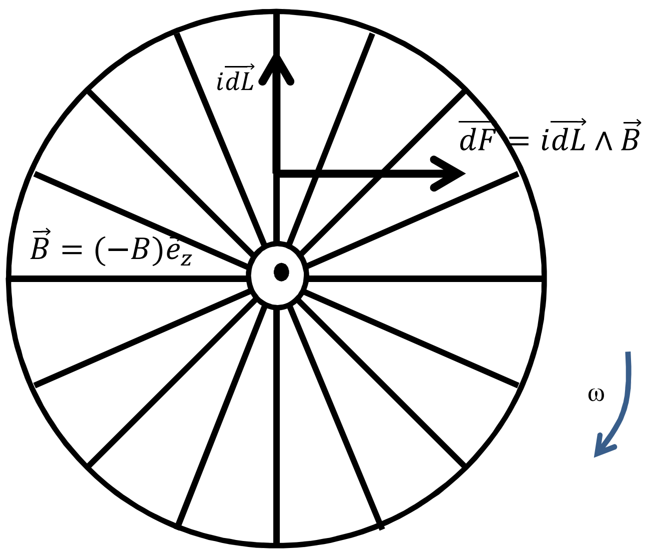
Le moment en O de cette force est : $\overrightarrow{dM_O} = OP\overrightarrow{e_r} \wedge dF\overrightarrow{e_\alpha} = IBrdr\vec{u}$

On déduit alors par intégration : $\overrightarrow{M_O} = \int_{barre} \overrightarrow{dM_O} = \int_0^l IBrdr\vec{u} = IB\dfrac{l^2}{2}$

L'équilibre est obtenu pour : $IB\dfrac{l^2}{2} - mg\dfrac{l}{2}\sin\alpha = 0$ d'où $\alpha_{éq} = \arcsin\left(\dfrac{\mathrm{I.B.}l}{\mathrm{mg}}\right)$.

## 5. Moteur à entrefer plan

### 1. Couple des actions de Laplace :




L'élément de longueur dL, de position P sur le rayon OA subit une force infinitésimale

$$\overrightarrow{dF} = i\overrightarrow{dL} \wedge \vec{B}$$

soit sur la base cylindrique :

$$\overrightarrow{dF} = i.dr\overrightarrow{e_r} \wedge (-B)\overrightarrow{e_z} = i.dr.B\overrightarrow{e_\theta}$$

Le moment élémentaire de cette force, en O est :

$$\overrightarrow{d\Gamma_O} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{dF} = r\overrightarrow{e_r} \wedge i.dr.B\overrightarrow{e_\theta} = iBrdr\overrightarrow{e_z}$$

En intégrant entre O et A pour un rayon donné, soit entre r = 0 et r = a, on tire

$$\overrightarrow{\Gamma_O} = \int_0^a iBrdr\overrightarrow{e_z} = \frac{iBa^2}{2}\overrightarrow{e_z}$$

Ce couple va entraîner le rotor en rotation.

Remarquons qu'il est proportionnel à l'intensité i, par un facteur constant, caractéristique de la géométrie du moteur (nombre de rayon, position effective des collecteurs...), et ayant la dimension d'un flux magnétique : $\Gamma_o = i.\varphi_o$ .

$\phi_o$ est une caractéristique du moteur, dépendant de ses dimensions, de sa géométrie, de sa conception. D'une façon plus générale, tous les moteurs dits « à courant continu » répondront à une relation de ce type.

2. Par le TMC en projection sur l'axe de rotation :

$$J\frac{d\omega}{dt} = \frac{iBa^2}{2} - h\omega(t) - C_o$$

On tire : $\omega(t) = \omega_{lim}.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$
avec $\omega_{lim} = (iBa^2 - C_o)/h$ et $\tau = J/h$.

**6. Mesure du champ magnétique terrestre.**

*1°) L'aiguille est soumise à un couple $\Gamma = MB.\sin\vartheta$. Le TMC appliquépar rapport à l'axe de rotation donne :* $J\ddot{\theta} + MB\sin\theta = 0$. *Pour $\vartheta \approx 0$, $\sin\vartheta \approx \vartheta$, oscillateur harmonique de période* $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB}}$.

*2°) $M = 4\pi^2J/(T_o^2B_o)$ avec $J = mL^2/12$ donne $M = 4{,}1.10^{-6}$ A.m².*

*3°) Les modules de deux champ s'additionnent (cas a) ou se soustraient (cas b).*

*$B_1 + B_h = (4\pi^2J/M)(1/T_a^2)$ et $B_1 - B_h = (4\pi^2J/M)(1/T_b^2)$*

*on tire :*

$$B_h = B_1\frac{{T_b}^2 - {T_a}^2}{{T_a}^2 + {T_b}^2}$$

*Notons $T_b = T_a + \Delta T$ ; et divisons numérateur et dénominateur par $T_a^2$.*

$$B_h = B_1\frac{(1 + \Delta T/T_a)^2 - 1}{1 + (1 + \Delta T/T_a)^2}$$

*en ne conservant que les termes d'ordre 1 en $\Delta T/T_a$ ,*

*(on rappelle le DL 1 : $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha.\varepsilon$)*

$$B_h = B_1 \frac{(1+2\Delta T/T_a) - 1}{1 + (1+2\Delta T/T_a)} \approx B_1 \frac{2\Delta T/T_a}{1}$$

*on obtient approximativement $B_h \approx 2.B_1.\Delta T/(2T_a)$ soit un écart relatif de l'ordre de $\Delta T/T_a \approx B_h/B_1 \approx 0{,}05$ avec $T_a \approx 1{,}6$ s donc $\Delta T \approx 80$ ms.*
*Une valeur de $B_1$ plus faible permettra d'avoir un effet relativement plus conséquent sur la période d'oscillation.*

**7. Principe du moteur synchrone :**

1. $\vec{B}(t)$ est un vecteur-champ tournant à la vitesse angulaire ω, de module $B_o$. Il aura une action magnétique sur l'aimant décrite par un couple qui va entraîner l'aimant en rotation.
2. Pour un aimant en rotation à vitesse ω, l'action de ce champ produit un couple :
$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}(t)$$
de module $B_o.M.\sin\theta_o$. qui tendra à maintenir la rotation de l'aimant. Ce couple est moteur pour $\theta_o > 0$ et récepteur pour $\theta_o < 0$. Son module est maximal à $\theta_o = \pi/2$ et vaut alors $B_o.M$. Il s'annule pour $\theta_o = 0$.
3. Par le TMC appliqué sur (Oz) : $\frac{d(J\omega)}{dt} = MB_o\sin\theta_o - \Gamma_r$ avec dω/dt = 0 à ω = cste.
donc $MB_o\sin\theta_o = \Gamma_r$
4. ω ne peut pas varier selon l'effort demandé (puisqu'imposé par l'alimentation des bobines produisant le champ). C'est donc $\theta_o$ qui va s'ajuster avec $\theta_o = \arcsin(\Gamma_r/(MB_o))$.
Ce qui impose d'avoir $\Gamma_r < MB_o$.

   Au-delà de cette valeur, le moteur va « décrocher » : le rotor ne suit plus la rotation à vitesse ω du champ.

   5 . L'angle entre moment magnétique et champ est alors $\theta(t) = (\omega - \omega')t + \theta_o$. Le couple est alors $MB_o\sin\theta(t)$ et sa valeur moyenne est nulle. En moyenne le rotor n'est plus entraîné.

Si au démarrage l'aimant-rotor est immobile et que le champ tournant est immédiatement mis en rotation à vitesse angulaire ω, le moteur ne peut pas démarrer. Les solutions technologiques de cette difficulté pourront être abordées en seconde année...