Equations dimensionnelles (CORRIGES)

1. Homogénéité dimensionnelle :

a) Tous les termes présents dans les expressions fournies doivent avoir la dimension de longueurs (en mètre).
$x = v_o \cos\alpha.t$ équation homogène
$z = -gt/2 + v_o \sin\alpha.t$ NH !! équation non homogène le terme $-gt/2$ doit être corrigé en $-gt^2/2$

$z = -gx^2 /(v_o.\cos^2\alpha) + x.\tan\alpha$ NH !! équation non homogène le terme $-gx^2 /(v_o.\cos^2\alpha)$ doit être corrigé en $-gx^2 /(v_o^2.\cos^2\alpha)$

b) $p' = (p + f')/ pf'$ NH !! équation non homogène, le membre de droite a la dimension de l'inverse d'une longueur. Etourderie classique faite à partir de la relation de conjugaison, vue en 1°S :
$(1/p') – (1/p) = (1/f')$ qui mène à $p' = pf' / (p + f')$.

c) Utiliser la loi de force de gravitation (que l'on doit supposer connue...) : $F = GMm/r^2$ en module.
On en déduit que GM/r^2 a la dimension de F/m, c'est dire d'une accélération d'après la seconde loi de Newton (accélération en $m.s^{-2}$).

L'équation $a^3/ T^2 = 4.\pi^2 / (G.M)$ est donc non homogène. Il faut inverser l'un des membres de l'égalité :
$T^2 / a^3 = 4.\pi^2 / (G.M)$
ou $a^3/ T^2 = (G.M) /4.\pi^2$

2. Energies :

Montrons que les expressions d'énergies données ci-après ont pour dimension : $[E] = L^2.M.T^{-2}$ ou en unités $[E] = kg.m^2s^{-2}$.

Travail d'une force, faisant un angle θ avec le vecteur déplacement de longueur L :
$[W] = [F].[L] [\cos\theta] = kg.m.s^{-2} .m = kg.m^2s^{-2}$ ($\cos\theta$ sans dimension) ;

Energie potentielle de pesanteur : $[Ep] = [m].[g].[z] = kg.m.s^{-2}.m = kg.m^2s^{-2}$;

Energie cinétique en mécanique classique : $[K] = [1/2]. [m].[v]^2 = kg.(m.s^{-1})^2 = kg.m^2s^{-2}$ ½ sans unité ;

Energie mécanique totale en mécanique relativiste : $E= \gamma mc^2$, avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, pour une particule de vitesse v et en notant $c = 3{,}0.10^8\ m.s^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide.
Le coefficient relativiste γ est sans unité ; $[m].[c]^2 = kg.(m.s^{-1})^2 = kg.m^2s^{-2}$.

Energie Joule dissipée sous forme de chaleur dans une résistance : $W = Ri^2t$;
Le travail reçu par une charge électrique q subissant une différence de potentiel U est $W_{élec} = qU$.
Donc [tension] = [énergie]/[charge].

La loi d'Ohm : $U = R.i$ montre que dimensionnellement, l'expression proposée pour l'énergie est de forme :
[Ri].[i].[t] = [tension].[intensité].|temps]

Or, une intensité est du point de vue dimensionnel le rapport d'une charge à un temps (débit de charge).
Il vient finalement : [Ri²t] = [tension].[intensité].|temps] =([énergie]/[charge]). ([charge]/[temps]).[temps] = [énergie]

Remarque : on peut rédiger selon la même démarche, en s'exprimant sur les unités des grandeurs : énergies en Joule, tension en Volt, charge en Coulomb, intensité en Ampère, temps en seconde.

3. Coefficient de viscosité et force de frottement :

L'expérience montre que la force de frottement F subie par une sphère plongée dans un fluide dépend de :

- η, coefficient de viscosité, caractéristique du fluide considéré, $[\eta] = L^{-1}.M.T^{-1}$
ou en unités : $[\eta] = m^{-1}.kg.s^{-1}$
- r : le rayon de la sphère, [r] = m
- v : la vitesse relative entre la sphère et le fluide, $[v] = m.s^{-1}$

Il vient : $[F] = [k].[\eta]^x.[r]^y.[v]^z$ où k est sans unité.
et l'on doit identifier les exposants x, y et z pour que $[F] = kg.m.s^{-2}$
Ceci impose alors :
x = 1 ; y = 1 ; z = 1.

On aura finalement : $F = k.\eta.r.v$ dans ce modèle de force de frottement.

4. Vibration d'une goutte d'eau.

R, le rayon de la goutte ; [R] = m
ρ, la masse volumique, pour tenir compte de l'inertie ; $[\rho] = kg.m^{-3}$
A, la constante intervenant dans l'expression de la force due à la tension superficielle (la dimension de A est celle d'une force par unité de longueur) ; $[A] = kg.m.s^{-2}.m^{-1} = kg.s^{-2}$
k_1 est ici une constante sans dimension.
On écrira donc : $f = k_1 .R^a .\rho^b .A^c$ où f est une fréquence, $[f] = s^{-1}$
La relation en unités s'écrit : $s^{-1} = m^a.kg^b.m^{-3b}.kg^c.s^{-2c}$ où a, b et c sont les exposants de R, ρ et A ;

Par identification :
exposant des kilogrammes 0 = b + c ; exposant des mètres 0 = a – 3b ; exposant des secondes -1 = -2c

On déduit les valeurs de a, b et c : c = 1/2 ; b = -1/2 ; a = -3/2.

5. Vibration d'une étoile : modèle de Lord Rayleigh (1915).

R, le rayon de l'étoile, en mètres (m) ; ρ la masse volumique en $kg.m^{-3}$;
G, la constante intervenant dans la force de gravitation entre deux masses : à partir de l'expression de la force de gravitation entre deux masses : $F = GMm/r^2$
On tire : $G = Fr^2/(Mm)$ donc en termes d'unités : $[G] = kg.m.s^{-2}.m^2.kg^{-2} = kg^{-1}.m^3.s^{-2}$
L'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, ρ et G :

$f = k_2 . R^a .\rho^b .G^c$, où la constante k_2 est sans dimension,

impose : $s^{-1} = m^a.kg^b.m^{-3b}.kg^{-c}.m^{3c}.s^{-2c}$

soit en identifiant les exposants : a + 3c – 3b = 0 ; b – c = 0 ; -1= -2c

ce qui conduit à : c = 1/2 ; b= 1/2 et a = 0

On a donc finalement : $f = k_2\sqrt{\rho G}$

Sachant que la valeur de G est connue, la mesure de la fréquence de vibration donnera accès à la masse volumique moyenne de l'étoile, puisque cette fréquence s'avère indépendante du rayon de l'étoile.